ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γραμμική Άλγεβρα II

Πρόχειρες Σημειώσεις και Ασκήσεις

Παραδόσεις Μ. Μαλιάκα
Επιμέλεια : Κωνσταντίνος Μπιζάνος

Αθήνα
28 Οκτωβρίου 2021

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι συγκεκριμένες σημειώσεις αφορούν το προπτυχιακό μάθημα Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ. Το περιεχόμενο των σημειώσεων έχει βασιστεί στην ύλη που διδάσκεται στο προπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών του τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Οι σημειώσεις αποτελούν ένα βοήθημα για τους εξεταζόμενους (και μη) φοιτητές, όμως επιβάλλεται να ειπωθεί πως σε καμία περίπτωση οι σημειώσεις αυτές δεν μπορούν να αντικαταστήσουν οποιοδήποτε αντίστοιχο σύγγραμμα της θεματολογίας του. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου βρίσκονται και ασκήσεις εξάσκησης για του φοιτητές, που ενδείκνυται η ενασχόληση μαζί τους για τη βέλτιστη κατανόηση τους μαθήματος.

Τέλος είναι σαφές ότι οι σημειώσεις θα περιέχουν τυπογραφικά (και όχι μόνο) σφάλματα, οπότε αν παρατηρήσετε λάθη μπορείτε να τα επισημάνετε στο e-mail : kostasbizanos@gmail.com.

Κωνσταντίνος Μπιζάνος,
Αθήνα,
28 Οκτωβρίου 2021

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΜΟΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

1.1 Ορισμός και ιδιότητες

Ορισμός 1.1.1. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.Θα λέμε ότι A, B είναι **όμοιοι** αν υπάρχει P αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$.

Παρατήρηση 1.1.1. Η ομοιότητα πινάκων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Έστω $A, B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(i) Ο A είναι όμοιος με A, αφού ισχύει ότι $A = I_n^{-1}AI_n$.

(ii) Αν A, B είναι όμοιοι, τότε και B, A είναι όμοιοι. Πράγματι, υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος ώστε
$$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow PB = P(P^{-1}AP) \Leftrightarrow A = PBP^{-1}.$$

(iii) Αν A, B είναι όμοιοι και B, C όμοιοι, τότε A, C είναι όμοιοι. Πράγματι, υπάρχουν P, Q αντιστρέψιμοι τέτοιοι ώστε $B = P^{-1}AP$ και $C = Q^{-1}BQ$. Τότε A, C είναι όμοιοι, αφού προκύπτει το εξής :
$$C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = (PQ)^{-1}A(PQ).$$

□

Παράδειγμα 1.1.1. Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι $B = P^{-1}AP$, όπου $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, άρα οι A, B είναι όμοιοι.

Παράδειγμα 1.1.2. Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Οι πίνακες A, B δεν είναι όμοιοι. Πράγματι, αν υπήρχε P αντιστρέψιμος ώστε

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2 \ ,$$

οδηγούμαστε σε άτοπο.

Παρατήρηση 1.1.2. Αν B όμοιος με I_n, τότε $B = I_n$.

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεσο μέσω του Παραδείγματος 1.1.2. □

Υπενθύμιση 1.1.1. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.Οι ακόλουθοι τρείς ακέραιοι ταυτίζονται* (rank$A$) *:*

(i) Ο μέγιστος αριθμός γραμμικών ανεξαρτήτων στηλών

(ii) Ο μέγιστος αριθμός γραμμικών ανεξαρτήτων γραμμών

(iii) $\dim \mathrm{Im}(L_A)$ με $L_A : \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{n\times 1}, X \mapsto AX$.

Πρόταση 1.1.1. Έστω A, B όμοιοι.Τότε ισχύουν τα ακόλουθα :

(i) $\det(A) = \det(B)$,

(ii) $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$.

Απόδειξη. (i) Αφού οι πίνακες A, B είναι όμοιοι υπάρχει P αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε ισχύει το εξής :

$$\det(B) = \det\left(P^{-1}AP\right) = \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A) \cdot \det(P) = \det(A).$$

(ii) Οι πίνακες είναι όμοιοι, άρα και ισοδύναμοι, δηλαδή έχουμε ότι $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$.

□

Προσοχή ! **Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά .**

Παράδειγμα 1.1.3. Για παράδειγμα οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ δεν είναι όμοιοι, αλλά $\det(A) = \det(B)$ και $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$.

1.2 Σχέση με γραμμικές απεικονίσεις

Ερώτημα. Πως εμφανίζονται όμοιοι πίνακες στην φύση ;

Μια ανεπίσημη απάντηση είναι ότι όμοιοι πίνακες προκύπτουν από αλλαγές βάσεων γραμμικών απεικονίσεων.Η αυστηρή απάντηση δίνεται μέσω του παρακάτω θεωρήματος.Όμως πρώτα ας υπενθυμίσουμε κάποια χρήσιμα εργαλεία.

Υπενθύμιση 1.2.1. (i) Έστω $\hat{a}$, βάση του V, και $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει $\hat{b}$, βάση του V, με $P = \left(1_V : \hat{b}, \hat{a}\right)$.

(ii) Έστω $\hat{a}, \hat{b}$ βάσεις του V. Τότε ισχύει ότι $\left(1_V : \hat{b}, \hat{a}\right)^{-1} = \left(1_V : \hat{a}, \hat{b}\right)$

(iii) Έστω $f : U \to V, g : V \to W$ γραμμικές απεικονίσεις και $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ διατεταγμένες βάσεις των U, V, W αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι

$$(g \circ f : \hat{a}, \hat{c}) = \left(g : \hat{b}, \hat{c}\right) \cdot \left(f : \hat{a}, \hat{b}\right).$$

Απόδειξη. Ενδεικτικά θα αποδειχθεί το (i). Επειδή $\hat{a} = (a_1, \cdots a_n)$ βάση του V, υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : V \to V$ με $(f : \hat{a}, \hat{a}) = P$. Τώρα, επειδή P αντιστρέψιμος, η f είναι ισομορφισμός, άρα τα $f(a_1), \cdots, f(a_n)$ είναι βάση του V. Θέτουμε $\hat{b} = (f(a_1), \cdots, f(a_n))$, τότε από ορισμό πίνακα γραμμικής απεικόνισης έχουμε $P = \left(1_V : \hat{b}, \hat{a}\right)$. □

Θεώρημα 1.2.1. Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση, $\hat{v}$ διατεταγμένη βάση του V και $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $A = (f : \hat{v}, \hat{v})$. Έστω $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(i) A, B είναι όμοιοι.

(ii) Υπάρχει $\hat{w}$ διατεταγμένη βάση του V τέτοια ώστε $B = (f : \hat{w}, \hat{w})$.

Απόδειξη.
- (i) → (ii) Έστω P αντιστρέψιμος με $B = P^{-1}AP$. Τότε από Υπενθύμιση 1.2.1 υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{w}$, ώστε $P = (1_V : \hat{w}, \hat{v})$.Τότε έχουμε το εξής :

$$B = (1_V : \hat{v}, \hat{w}) \cdot (f : \hat{v}, \hat{v}) \cdot (1_V : \hat{w}, \hat{v}) = (1_V \circ f \circ 1_V : \hat{w}, \hat{w}) = (f : w, w).$$

- (ii) → (i) Έστω $B = (f : \hat{w}, \hat{w})$ για κάποια διατεταγμένη βάση w του V. Θα δείξουμε ότι A, B είναι όμοιοι. Θέτουμε $P = (1_V : \hat{w}, \hat{v})$.Τότε έχουμε την εξής σχέση :

$$B = (f : \hat{w}, \hat{w}) = (1_V : \hat{v}, \hat{w}) \cdot (f : \hat{v}, \hat{v}) \cdot (1_V : \hat{w}, \hat{v}) = P^{-1}AP ,$$

άρα οι πίνακες A, B είναι όμοιοι.

□

1.3 Ασκήσεις Κεφαλαίου 1.

Ομάδα Α : 1,2,4,5,6,7 **Ομάδα Β** : 3

Άσκηση 1.1. Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$ και $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.Δείξτε ότι αν ο A είναι όμοιος με τον λI_n, τότε $A = \lambda I_n$.

Άσκηση 1.2. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

a. Αν οι πίνακες $A + \lambda I_n, B + \lambda I_n$ είναι όμοιοι για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$, δείξτε ότι οι A, B είναι όμοιοι.

b. Αληθεύει ότι αν οι A^2, B^2 είναι όμοιοι, τότε οι A, B είναι όμοιοι;

Άσκηση 1.3. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ όμοιοι πίνακες. Δείξτε τις εξής ισότητες.

a. $\det A = \det B$.

b. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$.

c. $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B$.

Άσκηση 1.4. Δείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

a. οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}$ δεν είναι όμοιοι.

b. οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι.

Άσκηση 1.5. Δίνεται γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$.

a. Υπολογίστε του πίνακες $(f : \hat{e}, \hat{e})$ και $(f : \hat{a}, \hat{a})$, όπου $\hat{a}$ είναι η διατεταγμένη βάση (a_1, a_2), όπου $a_1 = (1, -1), a_2 = (1, 1)$.

b. Βρείτε αντιστρέψιμο P με $(f : \hat{a}, \hat{a}) = P^{-1}(f : \hat{e}, \hat{e})P$ και αντιστρέψιμο Q με

$$(f : \hat{e}, \hat{e}) = Q^{-1} (f : \hat{a}, \hat{a})\, Q.$$

Άσκηση 1.6. Δίνεται γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, 2x + 2y + 4z, 3x + 3y + 6z).$$

a. Δείξτε ότι το σύνολο $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

b. Υπολογίστε τον πίνακα $(f : \hat{a}, \hat{a})$, όπου $a = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ και P αντιστρέψιμο με $(f : \hat{a}, \hat{a}) = P^{-1}(f : \hat{e}, \hat{e})P$.

c. Αληθεύει ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{b}$ του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $(f : \hat{b}, \hat{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

Άσκηση 1.7. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, f(X) = AX - XA$.

a. Δείξτε ότι η απεικόνιση f είναι γραμμική.

b. Αφού υπολογίστε τον πίνακα $B = \left(f : \hat{E}, \hat{E}\right)$, όπου $\hat{E} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ η συνήθης διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^{2\times 2}$, δείξτε ότι $\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f = 2$ και $B^3 = 0$.

c. Αληθεύει ότι υπάρχει βάση διατεταγμένη βάση $\hat{b}$ του $\mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε να ισχύει ότι $(f : \hat{b}, \hat{b}) = \operatorname{diag}(1, -1, 0, 0)$;

Άσκηση 1.8. Εξετάστε ποίες από τις επόμενες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε την απάντησή σας με απόδειξη ή αντιπαράδειγμα. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ όμοιοι πίνακες.

a. Αν $A = I_n$, τότε $B = I_n$.

b. Αν $B = -A \in \mathbb{F}^{3\times 3}$, τότε οι A και B δεν είναι αντιστρέψιμοι.

c. Οι πίνακες $\begin{pmatrix} A & \\ & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & \\ & B \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2n\times 2n}$ είναι όμοιοι.

d. Οι πίνακες $\begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & \\ & C \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(n+m)\times(n+m)}$ είναι όμοιοι, για κάθε $C \in \mathbb{F}^{m\times m}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

2.1 Διαιρετότητα

Αρχικά με $\mathbb{F}[x]$ συμβολίζουμε σύνολο πολυωνύμων με συντελεστές απο το $\mathbb{F}$. Κάθε $a(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $a(x) \neq 0$ γράφεται μοναδικά στη μορφή

$$a(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Με το προηγούμενο συμβολισμό, $n = \deg a(x)$, λέγεται **βαθμός** του $a(x)$, ενώ ο a_n ονομάζεται **μεγιστοβάθμιος συντελεστής** του $a(x)$.

Παρατήρηση 2.1.1. (i) $\deg(a(x) + b(x)) \leq max\{\deg a(x), \deg b(x)\}$,

(ii) $\deg(a^m(x)) = m \deg a(x)$.

Θεωρούμε τις εξής πράξεις στό $\mathbb{F}[x]$: $a(x) + b(x),\ a(x) \cdot b(x),\ \lambda \cdot a(x)$ με $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $\lambda \in \mathbb{F}$. Ετσι ο $\mathbb{F}[x]$ γίνεται $\mathbb{F}$- διανυσματικός χώρος ως προς την προηγούμενη πράξη πρόσθεσης και αριθμητικού πολλαπλασιασμού.

Παράδειγμα 2.1.1. Έστω τα πολυώνυμα $a(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ και $b(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ στο $\mathbb{F}[x]$. Τότε, έχουμε πως για το πολυώνυμο $c(x) = a(x) \cdot b(x)$ ισχύει :

$$c_j = \sum_{0 \leq t} a_{j-t} \cdot b_t.$$

Ορισμός 2.1.1. Έστω $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$. Θα λέμε ότι το $a(x)$ **διαιρεί** το $b(x)$ στο $\mathbb{F}$ αν υπάρχει $c(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοιο ώστε $b(x) = a(x) \cdot c(x)$ και συμβολίζουμε με $a(x)|b(x)$.

Παράδειγμα 2.1.2. (i) Έχουμε πως $x^2 + x + 1 | x^3 - 1$, αφού $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$.

(ii) Για κάθε πολυώνυμο $a(x) \in \mathbb{F}[x]$ ισχύει ότι $a(x)|0$.

(iii) Γενικά ισχύει ότι $0|a(x)$ αν και μόνο αν $a(x) = 0$.

Παρατήρηση 2.1.2. Αν $a(x) \in \mathbb{F}[x]$ διαιρεί δύο πολυώνυμα $b(x), c(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε διαιρεί και κάθε πολυώνυμο της μορφής $f(x)b(x) + g(x)c(x)$, για κάθε $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Απόδειξη. Έχουμε πως $a(x)|b(x)$. Δηλαδή, υπάρχει πολυώνυμο $q_1(x) \in \mathbb{F}[x]$, τέτοιο ώστε

$$b(x) = a(x)q_1(x).$$

Ομοίως υπάρχει πολυώνυμο $q_2(x) \in \mathbb{F}[x]$, τέτοιο ώστε $c(x) = a(x)q_2(x)$. Τότε προκύπτει το εξής :

$$f(x)b(x) + g(x)c(x) = f(x)a(x)q_1(x) + g(x)a(x)q_2(x) = a(x)\left[f(x)q_1(x) + g(x)q_2(x)\right]$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $a(x)|f(x)b(x) + g(x)c(x)$, για κάθε $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. □

Θεώρημα 2.1.1 (Ευκλείδια Διαίρεση)**.** Έστω $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $a(x) \neq 0$. Τότε υπάρχουν μοναδικά $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$, τετόια ώστε

$$b(x) = a(x)q(x) + r(x)$$

με $r(x) = 0$ ή $\deg r(x) < \deg a(x)$.

Παράδειγμα 2.1.3. Θεωρούμε τα πολυώνυμα $a(x) = x^2 + 1$ και $b(x) = x^3 - 2x + 1$. Τότε έχουμε ότι ισχύει το εξής :

$$b(x) = x \cdot a(x) + (-3x + 1).$$

Εφαρμογή 2.1.1. Έστω $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $c \in \mathbb{F}$. Τότε $c \in \mathbb{F}$ ρίζα του $f(x)$ αν και μόνο αν $x - c\ |f(x)$.

Απόδειξη. Έστω ότι $x - c\ |f(x)$, τότε υπάρχει $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x) = (x - c) \cdot g(x) \Rightarrow f(c) = (c - c)g(c) = 0.$$

Αντίστροφα, από το Θεώρημα 2.1.1 υπάρχουν $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$, ώστε :

$$f(x) = (x - c)q(x) + r(x),\ \ r(x) = 0\ \eta'\ \deg r(x) < \deg\,(x - c).$$

Άρα $\deg r(x) = 0$ με $f(c) = (c - c)q(c) + r(c) = 0 \Leftrightarrow r(c) = 0$.Δηλαδή $r(x) = 0$ με

$$f(x) = (x - c)q(x).$$

□

Ορισμός 2.1.2. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ όχι και τα δύο μηδέν. Ένα $d(x) \in \mathbb{F}[x]$ ονομάζεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης** των $f(x), g(x)$ αν ισχύουν τα εξής :

(i) $d(x)$ είναι μονικό (ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $d(x)$ είναι ίσος με 1),

(ii) $d(x)|f(x)$ και $d(x)|g(x)$,

(iii) Αν έχουν άλλο κοινό διαιρέτη $d'(x) \in \mathbb{F}[x], d'(x)|f(x)$ και $d'(x)|g(x)$, τότε ισχύει ότι $d'(x)|d(x)$.

Θεώρημα 2.1.2. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ όχι και τα δύο μηδέν.

(i) Υπάρχει μοναδικός μ.κ.δ. των $f(x), g(x)$.

(ii) Έστω $d(x) = \text{μ.κ.δ.}\,(f(x), g(x))$.

Τότε, υπάρχουν $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$, τέτοια ώστε : $d(x) = f(x) \cdot a(x) + g(x) \cdot b(x)$.

Ορισμός 2.1.3. Τα $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ λέγονται **σχετικά πρώτα** αν ισχύει το εξής :

$$\text{μ.κ.δ.}(f(x), g(x)) = 1.$$

Παράδειγμα 2.1.4. Για τον μ.κ.δ.$(x-a, x-b)$ ισχύει ότι

$$\text{μ.κ.δ.}(x-a, x-b) = \begin{cases} 1, & a \neq b \\ x-a, & a = b \end{cases}.$$

Εφαρμογή 2.1.2. Έστω $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ σχετικά πρώτα μεταξύ τους. Ισχύουν τα εξής :

(i) Αν $a(x)|b(x) \cdot c(x), c(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε ισχύει $a(x)|c(x)$.

(ii) Αν $a(x)|c(x), b(x)|c(x)$, τότε ισχύει $a(x) \cdot b(x)|c(x)$.

Απόδειξη. (i) Υποθέτουμε ότι μ.κ.δ.$\,(a(x), b(x)) = 1$. Από Θεώρημα 2.1.2 υπάρχουν $a'(x), b'(x) \in \mathbb{F}[x]$ ώστε :

$$1 = a'(x)a(x) + b'(x)b(x) \Rightarrow c(x) = c(x)a'(x)a(x) + c(x)b(x)b'(x) \tag{2.1}$$

Από υπόθεση, έχουμε $a(x)|b(x) \cdot c(x)$, δηλαδή υπάρχει $q(x) \in \mathbb{F}[x]$, ώστε $b(x)c(x) = q(x)a(x)$. Άρα ισχύει ότι

$$c(x) = c(x)a'(x)a(x) + c(x)q(x)a(x) = a(x)[a'(x)c(x) + q(x)c(x)] \Rightarrow a(x)|c(x). \tag{2.2}$$

(ii) Από τη σχέση 2.1 έχουμε ότι $a(x)|b(x), a(x)|c(x) \Rightarrow a(x)b(x)|c(x)$.

$\square$

2.2 Ανάγωγα Πολυώνυμα

Ορισμός 2.2.1. Ένα πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ θετικού βαθμού στο $\mathbb{F}[x]$ λέγεται **ανάγωγο** στο $\mathbb{F}[x]$ αν **δεν** υπάρχουν $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοια ώστε

$$a(x)b(x) = p(x) \quad \text{και} \quad \deg a(x) < \deg p(x),\ \deg b(x) < \deg p(x).$$

Παράδειγμα 2.2.1. (i) Κάθε $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\deg p(x) = 1$ είναι ανάγωγο.

(ii) Το πολυώνυμο $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ είναι ανάγωγο, ενώ $x^2 + 1 \in \mathbb{C}[x]$ δεν είναι ανάγωγο, αφού έχουμε την παραγοντοποίηση $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$.

Παρατήρηση 2.2.1. Έστω $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $p(x)$ ανάγωγο και μονικό. Τότε

$$\text{μ.κ.δ.}(p(x), q(x)) = \begin{cases} 1, & \text{αν } p(x) \not| q(x) \\ p(x), & \text{αν } p(x) | q(x) \end{cases}.$$

Πρόταση 2.2.1. Έστω $f(x) \in \mathbb{C}[x]$.Αν το $z \in \mathbb{C}$ ρίζα του $f(x)$, τότε $\bar{z}$ ρίζα του $f(x)$. [1]

Ερώτημα 2.2.1. Ποια είναι τα ανάγωγα πολυώνυμα στο $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$;

(i) Τα ανάγωγα πολυώνυμα του $\mathbb{C}[x]$ είναι πρωτοβάθμια πολυώνυμα. [2]

(ii) Τα ανάγωγα πολυώνυμα στο $\mathbb{R}[x]$ είναι πρωτοβάθμια ή δευτεροβάθμια με $\Delta < 0$

Θεώρημα 2.2.1. Κάθε $f(x)$ θετικού βαθμού γράφεται μοναδικά ως εξής:

$$f(x) = c p_1^{n_1}(x) \cdots p_s^{n_s}(x)\ ,$$

όπου $c \in \mathbb{C}$ και $p_i(x)$ μονικά ανάγωγα και ανα δύο διαφορετικά.

Παράδειγμα 2.2.2. (i) Έστω $f(x) = x^3 - 1 \in \mathbb{F}[x]$. Θα ελέγξουμε τις αναλύσεις του $f(x)$ σε γινόμενα παραγώγων για τις διάφορες περιπτώσεις του $\mathbb{F}$:

- Αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ έχουμε ότι $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$,
- Αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ έχουμε ότι $x^3 - 1 = (x - 1) \cdot \left(x - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

(ii) Για $g(x) = x^4 + 1$ παρατηρήστε ότι $g(x) = \left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right) \cdot \left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)$.

[1] Στο $\mathbb{C}$: Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, υπάρχουν μοναδικά $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, $z = a + bi$.Δηλαδή, $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ διανυσματικός χώρος με βάση $\{1, i\}$ και $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

[2] Το (i) είναι ισοδύναμο με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας (Κάθε πολυώνυμο θετικού βαθμού με μιγαδικούς συντελεστές έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$)

Πρόταση 2.2.2. Έστω $f(x) = c_1 p_1(x)^{m_1} \cdots p_s(x)^{m_s}, g(x) = c_2 p_1(x)^{n_1} \cdots p_s(x)^{n_s}$ με $p_i(x)$ ανάγωγα,μονικά ανά δύο διαφορετικά με $0 \leq m_i, n_i$. Θέτουμε $d_i = \min\{m_i, n_i\}$ και θεωρούμε το πολυώνυμο $d(x) = p_1(x)^{d_1} \cdots p_s(x)^{d_s}$. Τότε ισχύει ότι

$$d(x) = \text{μ.κ.δ.}\{f(x), g(x)\}.$$

Παράδειγμα 2.2.3. Στο $\mathbb{R}[x]$, θεωρούμε τα πολυώνυμα $f(x) = 3(x-5)^{10} \cdot \left(x^2+x+1\right)^6$ και $g(x) = -(x-5)^4(x-7)^4(x^2+x+1)^{10}$. Τότε ισχύει ότι

$$\text{μ.κ.δ.}(f(x), g(x)) = (x-5)^4 \left(x^2+x+1\right)^6 .$$

Ορισμός 2.2.2. Έστω $a \in \mathbb{F}$ ρίζα του $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Ο μέγιστος ακέραιος m τέτοιος ώστε $(x-a)^m | f(x)$ λέγεται **πολλαπλότητα** της ρίζα a στο $f(x)$. (Συμβολισμός $m = m(a)$)

Παράδειγμα 2.2.4. Για $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ και $f(x)(x-2)^5(x-3)(x^2+x+1)$ έχουμε πως $m(2) = 5, m(3) = 1$.

Ορισμός 2.2.3. Μια ρίζα a του $f(x)$ λέγεται **απλή** αν η πολλαπλότητά της είναι ίση με 1. Αλλιώς η ρίζα λέγεται **πολλαπλή**.

Πρόταση 2.2.3. Έστω $a \in \mathbb{F}$ ρίζα του $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Τότε a πολλαπλή ρίζα του $f(x)$ αν και μόνο αν a ρίζα και της παραγώγου $f'(x)$ του $f(x)$.

Απόδειξη. Αν a πολλαπλή ρίζα της $f(x)$ τότε ισχύει ότι $(x-a)^2 | f(x)$, δηλαδή υπάρχει $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, ώστε

$$f(x) = (x-a)^2 g(x).$$

Επομένως, προκύπτει ότι

$$f'(x) = 2(x-a)g(x) + (x-a)^2 g'(x) \ ,$$

όπου τελικά έχουμε $f'(a) = 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε $f(a) = f'(a) = 0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $(x-a)^2 | f(x)$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $f(x) = (x-a)g(x)$, δηλαδή $f'(x) = (x-a)g'(x) + g(x)$. Τότε, $f'(a) = g(a) = 0$. Άρα, $(x-a) | g(x)$, δηλαδή υπάρχει $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $g(x) = h(x)(x-a)$. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2.2.1. Έστω $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Αν μ.κ.δ.$(f(x), f'(x)) = 1$, τότε κάθε ρίζα του $f(x)$ είναι απλή.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση μέσω της Πρότασης 2.2.3. □

2.3 Πολυώνυμα και πίνακες

Ορισμός 2.3.1. Έστω $f(x) = f_m x^m + \cdots + f_1 x + f_0 \in \mathbb{F}[x]$ και έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Με $f(A)$ θα συμβολίζουμε το πίνακα
$$f(A) = f_m A^m + \cdots + f_1 A + f_0 I_n.$$

Παράδειγμα 2.3.1. Αν $f(x) = -3x + 5 \in \mathbb{R}[x]$, τότε έχουμε ότι $f(A) = -3A + 5I_n$, για κάθε $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

Παρατήρηση 2.3.1. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $h(x) = f(x) + g(x)$, $\kappa(x) = f(x)g(x)$. Τότε, για κάθε $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ισχύει ότι
$$h(A) = f(A) + g(A) \quad \text{και} \quad \kappa(A) = f(A)g(A).$$

Παράδειγμα 2.3.2. (i) Θεωρούμε τα πολυώνυμα $f(x) = x^2 - x$ και $g(x) = x + 1$ στο $\mathbb{R}[x]$. Τότε αν $k(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3 - x$ προκύπτει ότι
$$\kappa(A) = f(A) \cdot g(A) = A^3 - A = A(A - I_n) \cdot (A + I_n).$$

(ii) Αν $b(x) = q(x) \cdot a(x) + r(x)$ έπεται ότι $b(A) = q(A) \cdot a(A) + r(A)$.

2.4 Πολυώνυμα και γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός 2.4.1. Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση και $a(x) = a_m x^m + \cdots a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$. Με $a(f)$ συμβολίζουμε την γραμμική απεικόνιση
$$a(f)\colon V \to V, \quad a(f) = a_m f^m + \cdots + a_1 f + a_0 1_V.$$

Παρατήρηση 2.4.1. Έστω $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $c(x) = a(x)+b(x), d(x) = a(x)\cdot b(x)$ και $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση. Τότε, ισχύει ότι
$$c(f) = a(f) + b(f) \quad \text{και} \quad d(f) = a(f) \circ b(f) \text{ (σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων).}$$

Παράδειγμα 2.4.1. Αν $P(x) = x^2 - 1 \in \mathbb{F}[x]$, τότε έχουμε ότι $P(f) = f^2 - 1_V = (f - 1_V) \circ (f + 1_V)$ (σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων).

Πρόταση 2.4.1. Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση, $\hat{v}$ μια διατεταγμένη βάση του V και $A = (f : \hat{v}, \hat{v})$. Τότε, για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, έχουμε ότι $(\varphi(f) : \hat{v}, \hat{v}) = \varphi(A)$.

Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
&(\varphi(f)\colon \hat{v},\hat{v}) = (\varphi_m \cdot f^m + \cdots + \varphi_1 \cdot f + \phi_0 \cdot 1_V : \hat{v},\hat{v}) \\
&= (\varphi_m f^m \colon \hat{v},\hat{v}) + \cdots + (\varphi_1 f\colon \hat{v},\hat{v}) + (\phi_0 1_V : \hat{v},\hat{v}) \\
&= \varphi_m \cdot (f^m \colon \hat{v},\hat{v}) + \cdots + \varphi_1 \cdot (f\colon \hat{v},\hat{v}) + \varphi_0 \cdot (1_V : \hat{v},\hat{v}) \\
&= \varphi_m \cdot A^m + \cdots + \varphi_1 \cdot A + \phi_0 \cdot I_n = \varphi(A).
\end{aligned}
$$

□

Παράδειγμα 2.4.2. (i) Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση :

$$
f\colon \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3, \quad A = (f\colon \hat{v},\hat{v}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Τώρα, αν $g = f^2 + 3f + 1_{\mathbb{F}^3}$, έχουμε ότι $(g : \hat{v},\hat{v}) = A^2 + 3A + I_n = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 4 \\ -6 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(ii) Έστω $f\colon V \to V$ γραμμική απεικόνιση και $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοιο ώστε $\varphi(f) = 0$. Αν ο σταθερός όρος του φ δεν είναι ίσος με το 0, τότε f είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $\varphi(x) = \varphi_m x^m + \cdots + \varphi_2 x^2 + \varphi_1 x + \varphi_0$, όπου από την υπόθεση $\phi(f) = 0$, δηλαδή

$$
\varphi_m f^m + \cdots + \varphi_1 f + \varphi_0 1_V = 0 \Leftrightarrow 1_V = \left[-\frac{1}{\varphi_0} \cdot \left(\varphi_m f^{m-1} + \cdots + \varphi_1 \right) \circ f \right].
$$

Ομοίως

$$
1_V = \left[f \circ \left(\varphi_m f^{m-1} + \cdots + \varphi_1 \right) \cdot \frac{-1}{\varphi_0} \right] ,
$$

άρα η f είναι ισομορφισμός. □

2.5 Ασκήσεις Κεφαλαίου 2.

Ομάδα A : 1,2,3,5,6,7,8,9,11,15 **Ομάδα B :** 4,10,12,13,14,16

Άσκηση 2.1. Έστω $f(x), p(x) \in \mathbb{F}[x]$ όπου $p(x)$ μονικό και ανάγωγο. Δείξτε ότι

$$\text{μ.κ.δ.}(f(x), p(x)) = 1 \quad \text{ή} \quad \text{μ.κ.δ.}(f(x), p(x)) = p(x).$$

Άσκηση 2.2. Βρείτε το μ.κ.δ. $\left(x^2+1, x^{2018}+1\right)$ και το μ.κ.δ. $\left(x^2+1, x^{2018}-1\right)$.

Άσκηση 2.3.

a. Έστω $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $a, b \in \mathbb{F}$ με $a \neq b$. Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $(x-a)(x-b)$.

b. Βρείτε όλες τις τιμές των $c, d \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $(x-1)(x-2)\big|x^{100}+cx^5+dx+1$.

c. Βρείτε όλες τις τιμές των $c, d \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $(x-1)^2\big|x^{100}+cx^5+dx+1$.

Άσκηση 2.4. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x) = 2x^3-3x^2+6x+5$ και $g(x) = x^3+ax^2+x+1$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

a. Βρείτε τις ρίζες στο $\mathbb{C}$ του $f(x)$.

b. Για ποιές τιμές του a τα $f(x), g(x)$ έχουν κοινή πραγματική ρίζα ;

c. Βρείτε την ανάλυση του $g(x)$ σε γινόμενο μονικών αναγώγων στο $\mathbb{R}[x]$ αν μια ρίζα του στο $\mathbb{C}$ είναι το i.

Άσκηση 2.5. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, όπου $f(x) = x^5-x^4-x^2+x,\ g(x) = x^2+x-6$. Να βρέθει ο μ.κ.δ. και το ε.κ.π. τους.

Άσκηση 2.6. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, όπου $f(x) = x^3-x^2+x-1,\ g(x) = x^2+x-2$. Να βρεθούν οι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $f(A) = g(A) = 0$.

Άσκηση 2.7. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ με μ.κ.δ.$(f(x), g(x)) = 1$.

a. Δείξτε ότι δεν υπάρχει $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $f(A) = g(A) = 0$.

b. Αληθεύει ότι για κάθε $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ υπάρχουν $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοια ώστε $h(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$;

Άσκηση 2.8. Δείξτε ότι κάθε ρίζα στο $\mathbb{C}$ του $f(x)$ είναι απλή στις περιπτώσεις

a. $f(x) = x^n-1$,

b. $f(x) = x^n+x+1$.

Άσκηση 2.9. Έστω $f\colon \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$ η γραμμική απεικόνιση με $(f : \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, όπου $\hat{a}$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^3$ και $\varphi(x) = x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{F}[x]$. Να βρεθεί ο πίνακας $(\varphi(f)\colon \hat{a}, \hat{a})$.

Άσκηση 2.10. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Δείξτε τα εξής.

a. Αν ο A είναι διαγώνιος, $A = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n)$, τότε $\varphi(A) = \operatorname{diag}(\varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_n))$.

b. Αν ο A είναι της μορφής $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}$, όπου $A_i \in \mathbb{F}^{n_i \times n_i}$ και $n_1 + \cdots n_k = n$ ('μπλόκ διαγώνιος'), τότε $\varphi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi(A_k) \end{pmatrix}$.(**Σημείωση**. Εννοούμε ότι τα αόρατα στοιχεία είναι 0.)

c. Αν ο A είναι άνω τριγωνικός, $A = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$, τότε $\varphi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(a_1) & & * \\ & \ddots & \\ & & \varphi(a_n) \end{pmatrix}$.

d. Αν ο A είναι της μορφής $A = \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}$, όπου $A_i \in \mathbb{F}^{n_i \times n_i}$ και $n_1 + \cdots n_k = n$ ('μπλόκ άνω τριγωνικός'), τότε $\varphi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(A_1) & & * \\ & \ddots & \\ & & \varphi(A_k) \end{pmatrix}$.

Άσκηση 2.11. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

a. Έστω $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ με μη μηδενικό σταθερό όρο και $\varphi(A) = 0$. Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.

b. Έστω $A^5 = 0$.Δείξτε ότι ο πίνακας $\varphi(A)$ είναι αντιστρέψιμος, όπου $\varphi(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

Άσκηση 2.12. Το συμπέρασμα στο ερώτημα b ονομάζεται το **Θεώρημα του Lagrange**. Για $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, λέει ότι από n διαφορετικά σημεία του επιπέδου διέρχεται μοναδική πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ $n-1$, κατ'αναλογία με το γεγονός ότι από δύο διακεκριμένα σημεία του επιπέδου διέρχεται μοναδική ευθεία. Έστω $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ διακεκριμένα. Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{F}_{n-1}[x]$ όλων των πολυωνύμων βαθμού το πολύ $n-1$ και την απεικόνιση

$$f\colon \mathbb{F}_{n-1}[x] \to \mathbb{F}^n, f(\varphi(x)) = (\varphi(\lambda_1), \cdots, \varphi(\lambda_n)).$$

a. Δείξτε ότι η απεικόνιση f είναι γραμμική, 1-1 και επί.

b. Δείξτε ότι για κάθε $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$ υπάρχει μοναδικό $\varphi(x) \in \mathbb{F}_{n-1}[x]$ τέτοιο ώστε $\varphi(\lambda_1) = a_1, \cdots, \phi(\lambda_n) = a_n$.

c. Βρείτε πολυώνυμο $\varphi(x)$ τέτοιο ώστε $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 1, \varphi(-1) = 1$.

d. Δείξτε ότι το $\varphi(x)$ του υποερωτήματος b δίνεται από τη σχέση $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(x)$, όπου

$$\varphi_j(x) = \prod_{k=1, k\neq j}^{n} \frac{x - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}.$$

Άσκηση 2.13. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$.

a. Δείξτε ότι $f(B) = \begin{pmatrix} f(A) & f'(A) \\ 0 & f(A) \end{pmatrix}$ για κάθε $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, όπου $f'(x)$ είναι η παράγωγος του $f(x)$.

b. Δείξτε ότι αν $(A - I_n)^{2013}(A - 2I_n)^{2014} = 0$, τότε $(B - I_{2n})^{2014}(B - 2I_{2n})^{2015} = 0$.

Άσκηση 2.14. Δείξτε ότι για κάθε $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ υπάρχει μη μηδενικό $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ βαθμού το πολύ n^2 τέτοιο ώστε $\varphi(A) = 0$.

Άσκηση 2.15. Έστω $A, B, P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $B = P^{-1}AP$.Δείξτε ότι $\varphi(B) = P^{-1}\varphi(A)P$ για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Άσκηση 2.16. Έστω $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Θέτουμε

$$e_i = \sum_{1\leq t_1 < \cdots < t_i \leq n} a_{t_1} a_{t_2} \cdots a_{t_i},\ i = 1, \cdots, n.$$

Για παράδειγμα, αν $n = 3$, τότε

$$e_1 = a_1 + a_2 + a_3,\ e_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3,\ e_3 = a_1a_2a_3.$$

Δείξτε ότι αν $e_i > 0$ για κάθε $i = 1, \cdots, n$, τότε $a_i > 0$ για κάθε $i = 1, \cdots n$.

Άσκηση 2.17. Εξετάστε ποίες από τις επόμενες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε την απάντηση σας με απόδειξη ή αντιπαράδειγμα. Έστω $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x]$.

a. Αν $f(x)\big|g(x)h(x)$, τότε $f(x)\big|g(x)$ ή $f(x)\big|h(x)$.

b. Έστω $f(x)$ ανάγωγο. Αν $f(x)\big|g(x)h(x)$, τότε $f(x)\big|g(x)$ ή $f(x)\big|h(x)$.

c. Αν $f(x)\big|h(x)$ και $g(x)\big|h(x)$, τότε $f(x)g(x)\big|h(x)$.

d. Αν $f(x)\big|h(x), g(x)\big|h(x)$ και μ.κ.δ.$(f(x), g(x)) = 1$, τότε $f(x)g(x)\big|h(x)$.

e. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.Αν $f(A) = g(A) = 0$, τότε τα $f(x), g(x)$ δεν είναι σχετικά πρώτα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

3.1 Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και ιδιόχωροι πίνακα

3.1.1 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πίνακα

Ορισμός 3.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n},\ \lambda \in \mathbb{F}$ και $X \in \mathbb{F}^{n\times 1},\ X \neq 0$. Αν ισχύει η σχέση

$$AX = \lambda X \tag{3.1}$$

θα λέμε ότι λ είναι **ιδιοτιμή** του A και το X είναι αντίστοιχο **ιδιοδιάνυσμα** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Παράδειγμα 3.1.1. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(i) Έχουμε ότι $AX = X$, άρα το 1 είναι ιδιοτιμή του A και X αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A.

(ii) Έχουμε ότι $AY = -Y$, άρα το -1 είναι ιδιοτιμή του A και Y αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A.

(iii) Έχουμε ότι $AZ = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση $\lambda Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, οπότε το Z δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A.

Παράδειγμα 3.1.2. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A.

Απόδειξη. Έστω $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Για την εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 3.1 και σκοπεύουμε να προσδιορίσουμε τα λ και X. Άρα έχουμε

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+3y \\ 4x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y = \lambda y \\ x+3y = \lambda x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+(2-\lambda)y = 0 \\ (1-\lambda)x+3y = 0 \end{cases}$$

όπου το τελευταίο σύστημα είναι γραμμικό ομογενές σύστημα και έχει μη-μηδενική λύση αν και μόνο αν ισχύει :

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \quad \text{ή} \quad \lambda = -2 \,.$$

Άρα προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda = 5$ και $\lambda = -2$. Τώρα θα προσδιορίσουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους.

(i) Για την ιδιοτιμή $\lambda = -2$ έχουμε πως ικανοποιείται η σχέση $3x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = -x$. Επομένως ισχύει ότι

$$V(-2) = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid y = -x\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του A για $\lambda = -2$.

(ii) Για την ιδιοτιμή $\lambda = 5$ έχουμε πως ικανοποιείται η σχέση $-4x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x$. Επομένως ισχύει ότι

$$V(5) = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid y = \frac{4}{3}x\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ \frac{4x}{3} \end{pmatrix}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\rangle$$

είναι το σύνολο το ιδιοδιανυσμάτων του A για $\lambda = 5$.

□

Παράδειγμα 3.1.3. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(a) Υποθέτουμε ότι $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$. Τότε παρατηρούμε ότι

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x - y &= 0 \\ x + \lambda y &= 0 \end{cases} ,$$

δηλαδή ισχύει ότι $\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα δεν υπάρχουν ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του A στο $\mathbb{R}$.

(b) Αν υποθέσουμε ότι $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ για $\lambda \in \mathbb{C}$ και $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 1}$ ισχύει ότι

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x - y &= 0 \\ x + \lambda y &= 0 \end{cases} ,$$

όπου το σύστημα έχει μη-μηδενική λύση ανν $\det\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{pmatrix} = \lambda^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda = i$ ή $\lambda=-i$.

(i) Για την ιδιοτιμή $\lambda = i$ έχουμε πως ικανοποιείται η σχέση $ix - y = 0 \Leftrightarrow y = ix$. Επομένως ισχύει ότι

$$V(i) = \{X \in \mathbb{C}^{2\times 1} \mid y = ix\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\ ix\end{pmatrix}\right\} = \left\langle\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\rangle$$

είναι το σύνολο το ιδιοδιανυσμάτων του A, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = i$.

(ii) Για την ιδιοτιμή $\lambda = -i$ έχουμε πως ικανοποιείται η σχέση $-ix - y = 0 \Leftrightarrow y = -ix$. Επομένως ισχύει ότι

$$V(-i) = \{X \in \mathbb{C}^{2\times 1} \mid y = -ix\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\ -ix\end{pmatrix}\right\} = \left\langle\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\right\rangle$$

είναι το σύνολο το ιδιοδιανυσμάτων του A, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = -i$.

Ιδιότητες 3.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{F}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Το λ είναι ιδιοτιμή του A.

(ii) Υπάρχει $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ με $X \neq 0$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda I_n)X = 0$.

(iii) $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Απόδειξη. • (i) $\to$ (ii) Από τον ορισμό υπάρχει $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ με $X \neq 0$ ώστε να ισχύει το εξής :

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0.$$

• (ii) $\to$ (iii) Η συνεπαγωγή έπεται άμεσα από την εξής πρόταση :

Αν $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $BX = 0$ έχει μη -μηδενική λύση αν και μόνο αν $\det B = 0$.

(iii) $\to$ (i) Έχουμε ότι $\det(A - \lambda I_n) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $X \neq 0$ με $(A - \lambda I_n)X = 0 \Leftrightarrow AX = \lambda X$, όπου έπεται ότι το λ είναι ιδιοτιμή του A. □

Πόρισμα 3.1.1. (i) Ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A.

(ii) Αν πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι άνω ή κάτω τριγωνικός με διαγώνια στοιχεία $a_1, \cdots, a_n$ τότε ισχύει ότι $\det(A - \lambda I_n) = 0$ αν και μόνο αν $\prod_{i=1}^{n}(a_i - \lambda) = 0$. Άρα $\det(A - \lambda I_n) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ με $a_i = \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{F}$.

(iii) Το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν λ είναι ιδιοτιμή του A^t.

Απόδειξη. (i) Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

(ii) Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

(iii) Έχουμε πως $\det(A-\lambda I_n) = \det(A-\lambda I_n)^t = \det(A^t - \lambda I_n) = 0$, άρα λ είναι ιδιοτιμή του A^t. □

Παράδειγμα 3.1.4. Παρατηρούμε ότι το 2 είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, αφού ισχύει ότι

$$\det(A - 2I_3) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Επίσης το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A, αφού $\det A = 6 \neq 0$.

3.1.2 Ιδιόχωροι Πίνακα

Ορισμός 3.1.2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και λ ιδιοτιμή του A. Ο **ιδιόχωρος** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ είναι το σύνολο

$$V_A(\lambda) = \left\{ X \in \mathbb{F}^{n\times 1} \mid AX = \lambda X \right\}.$$

Παρατήρηση 3.1.1. (i) Το $V_A(\lambda)$ είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στο λ και το 0.

(ii) Το $V_A(\lambda)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ ως σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος $(A - \lambda I_n) \cdot X = 0$.

Θεώρημα 3.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ ιδιοτιμή του A. Τότε ισχύει το εξής :

$$\dim V_A(\lambda) = n - \operatorname{rank}(A - \lambda I_n).$$

Απόδειξη. Έστω η απεικόνιση $L_B : \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{n\times 1},\ L_B(X) = BX$, όπου $B = A - \lambda I_n$. Τότε ισχύουν τα εξής :

(i) $\dim \ker L_B + \dim \operatorname{Im} L_B = n$,

(ii) $\dim \operatorname{Im} L_B = \operatorname{rank} B$.

Από (i),(ii), αφού $\dim \ker L_B = \dim V_A(\lambda)$ έπεται ότι $\dim V_A(\lambda) = n - \operatorname{rank}(A - \lambda I_n)$. □

3.1.3 Ιδιότητες Ιδιόχωρων

Πρόταση 3.1.1. Έστω $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ κάποιες από τις διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα A.Έστω $X_1, \cdots, X_s \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ με $X_i \in V_A(\lambda_i)$, για κάθε $i \in \{1, 2, \cdots, s\}$. Αν $X_1 + \cdots + X_s = 0$, τότε $X_1 = X_2 = \cdots = X_s = 0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με χρήση επαγωγής στο s.

- **Βάση.** Για $s = 1$, το ζητούμενο έπεται κατά τετριμμένο τρόπο.

- **Επαγωγικό Βήμα.** Έστω πως το ζητούμενο ισχύει για κάποιο $s-1 \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχουν $X_1, \cdots, X_s \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ ώστε να ισχύει το εξής :

$$X_1 + \cdots + X_s = 0 \tag{3.2}$$

Τότε

$$AX_1 + \cdots AX_s = 0 \tag{3.3}$$

δηλαδή

$$\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_s X_s = 0 \tag{3.4}$$

Άρα αν αφαιρέσουμε το πρώτη και τρίτη σχέση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 3.4 - \lambda_1 \cdot 3.2 &\Leftrightarrow \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_s X_s - (\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_1 X_s) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)X_2 + \cdots + (\lambda_s - \lambda_1)X_s = 0 \end{aligned}$$

Αφού $V_A(\lambda_i) \leq \mathbb{F}^{n\times 1}$ έχουμε πως $(\lambda_i - \lambda_1)X_i \in V_A(\lambda_i)$ και από επαγωγική υπόθεση έχουμε $(\lambda_i - \lambda_1)X_i = 0,\ i = 2, 3, \cdots, s$. Αφού $i \neq 1$ και οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, τότε $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$, δηλαδή $X_i = 0$ για $i = 2, 3, \cdots, s$. Από τη σχέση 3.2 προκύπτει ότι $X_1 = 0 \Leftrightarrow X_i = 0$, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, s$.

□

Πόρισμα 3.1.2. Ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα A που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Έστω A πίνακας, $X_1, \cdots, X_s$ ιδιοδιανύσματά του με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, όπου $\lambda_i \neq \lambda_j$, για κάθε $i, j \in \{1, 2, \cdots s\}$ με $i \neq j$. Έστω $m_1 X_1 + \cdots + m_s X_s = 0$ όπου $m_i \in \mathbb{F}, i \in \{1, 2, \cdots, s\}$. Αφού $V_A(\lambda_i) \leq \mathbb{F}^{n\times 1}$ και από Πρόταση 3.1.1 έπεται ότι $m_i X_i = 0$. Άρα $m_i = 0$, αφού $X_i \neq 0$ ως ιδιοδιάνυσμα του A. □

Εφαρμογή 3.1.1. Έστω X, Y ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του A. Δείξτε ότι το $aX + bY$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A αν $a \cdot b \neq 0$.

Απόδειξη. Έστω A πίνακας και X, Y ιδιοδιανύσματά του με αντίστοιχες ιδιοτιμές r, m αντίστοιχα με $r \neq m$. Έστω πως $aX + bY$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A, δηλαδή $aX + bY \neq 0$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ η αντίστοιχη ιδιοτιμή του. Άρα προκύπτει πως :

$$\begin{aligned} A(aX + bY) = \lambda(aX + bY) &\Leftrightarrow aAX + bAY = \lambda aX + \lambda bY \\ arX + bmY = \lambda aX + \lambda bY &\Leftrightarrow (ar - a\lambda)X + (bm - b\lambda)Y = 0 \end{aligned}$$

Όμως τα X, Y είναι γραμμικά ανεξάρτητα από Πόρισμα 3.1.2. Συνεπώς, προκύπτει ότι $a\lambda = ar$ και $bm = b\lambda$. Συνδυάζοντας ότι $a, b \neq 0$ συμπεραίνουμε, ότι $\lambda = r = m$, και οδηγούμαστε σε άτοπο. □

Πρόταση 3.1.2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, λ ιδιοτιμή του A και X ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε $\varphi(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $\varphi(A)$ και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το X. Δηλαδή ισχύει ότι $V_A(\lambda) \subseteq V_{\varphi(A)}(\varphi(\lambda))$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $AX = \lambda X$. Τότε παρατηρούμε το εξής :

$$A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X.$$

Μέσω της παραπάνω παρατήρησης θα αποδείξουμε ένα γενικότερο απότελεσμα με επαγωγή.

Ισχυρισμός. *Ισχύει ότι $A^m X = \lambda^m X$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με χρήση επαγωγής.

- **Βάση.** Για $m = 1$, $A^1X = \lambda^1 X$, που ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Υποθέτουμε, πως υπάρχει $m \in \mathbb{N},\ m > 1$, ώστε $A^m X = \lambda^m X$.

  $$A^{m+1}X = A(A^m X) = A(\lambda^m X) = \lambda^m(AX) = \lambda^m(\lambda X) = \lambda^{m+1}X\ .$$

  Αποδεικνύοντας λοιπόν το επαγωγικό βήμα το ζητούμενο ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

□

Έστω τώρα το πολυώνυμο $\varphi(x) = \varphi_m x^m + \cdots + \varphi_0 \in \mathbb{F}[x]$, όπου έπεται άμεσα ότι $\varphi(A) = \varphi_m A^m + \cdots + \varphi_0 I_n$. Από τα παραπάνω λοιπόν προκύπτει το εξής αποτέλεσμα :

$$\varphi(A)\cdot X = \varphi_m A^m X + \cdots + \varphi_0 X = \varphi_m \lambda^m X + \cdots \varphi_0 X = (\varphi_m \lambda^m + \cdots + \varphi_0)\,X = \varphi(\lambda)\cdot X.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι $\varphi(A)\cdot X = \varphi(\lambda)\cdot X$, δηλαδή $X \in V_{\varphi(A)}(\varphi(\lambda))$. Επειδή, X είναι ιδιοδιάνυσμα του A, τότε $X \neq 0$. Άρα το X είναι ιδιοδιάνυσμα του $\varphi(A)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\varphi(\lambda)$. □

Παράδειγμα 3.1.5. Προσοχή ! Η ισότητα δεν ισχύει γενικά. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, τότε ισχύει ότι $V_A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Όμως για $\varphi(x) = x^2$ ισχύει ότι $A^2 = I_2$ και $V_{\varphi(A))}(1^2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^{2\times 1}$

Παράδειγμα 3.1.6. (a) Αν $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα A και -1 η ιδιοτιμή του, τότε $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του $A^{1821} + 10A$ με ιδιοτιμή την $(-1)^{1821} + 10(-1) = -11$.

(b) Έστω $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ με ιδιοτιμές $2, -3$. Άρα για τον πίνακα $A^2 + 5I_n$, όπου $\varphi(x) = x^2 + 5$, οι αριθμοί $9, 14$ είναι ιδιοτιμές του $\varphi(A)$ και μάλιστα οι μοναδικές.

(c) Αν B ένας πίνακας με ιδιοτιμές $-1, 1$, τότε ο B^2 έχει ιδιοτιμή το 1 .

3.2 Ιδιοτιμές,ιδιοδιανύσματα και γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός 3.2.1. Έστω $f\colon V \to V$ γραμμική απεικόνιση, $\lambda \in \mathbb{F}$ και $v \in V$ με $v \neq 0$. Αν ισχύει, $f(v) = \lambda v$, θα λέμε ότι το λ είναι **ιδιοτιμή** της f και το v αντίστοιχο **ιδιοδιάνυσμα** της f που αντιστοιχεί στο λ. Αν λ ιδιοτιμή της f, ο αντίστοιχος **ιδιόχωρος** της f είναι το σύνολο

$$V_f(\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}.$$

Παρατήρηση 3.2.1. Αν $f\colon V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση και λ μια ιδιοτιμής της, τότε

$$V_f(\lambda) = \ker(f - \lambda \cdot 1_V) \leq V.$$

Πρόταση 3.2.1. Έστω $f\colon V \to V$ γραμμική απεικόνιση. Τότε αν $\hat{v}$ μια οποιαδήποτε διατεταγμένη βάση του V και $A = (f\colon \hat{v}, \hat{v})$ ισχύει

$$\dim V_f(\lambda) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(f - \lambda 1_V) = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda I_n).$$

Παράδειγμα 3.2.1. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (0, 0, x + y)$. Να βρεθεί μια βάση κάθε ιδιόχωρου.

Απόδειξη. Αναζητούμε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ώστε : $f(x, y, x) = \lambda(x, y, z),\ \lambda \in \mathbb{R}$. Άρα μέσω της σχέσης $(0, 0, x + y) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ προκύπτει το εξής σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x = 0 \\ \lambda y = 0 \\ \lambda z = x + y \end{cases}.$$

Το σύστημα έχει μη-μηδενική λύση αν και μόνο αν $\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Άρα προκύπτει πως $x = -y$. Έχουμε λοιπόν το εξής :

$$V_f(0) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y\big\} = \big\{(x, -x, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\big\} = \langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

και μάλιστα είναι ο μοναδικός ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην f. Τα στοιχεία $(1, -1, 0), (0, 0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ βάση του $V_f(0)$. □

Προσοχή στο συγκεκριμένο παράδειγμα !

Παράδειγμα 3.2.2. Έστω $V = \mathbb{R}_2[x]$ και $f\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], f(\varphi(x)) = \varphi(x) + \varphi'(x)$ γραμμική απεικόνιση. Να βρεθεί μια βάση για κάθε υπόχωρο της f.

Απόδειξη. Έστω $\varphi(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ με $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$, ώστε να ισχύει $f(\varphi(x)) = \lambda \cdot \varphi(x)$ ισοδύναμα

$$ax^2 + bx + c + 2ax + b = a\lambda x^2 + b\lambda x + \lambda c \Leftrightarrow \begin{cases} a(1-\lambda) = 0 \\ 2a - b(1-\lambda) = 0 \\ b + c(1-\lambda) = 0 \end{cases}$$

το οποίο έχει μη- μηδενική λύση αν και μόνο αν ισχύει το εξής :

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Για τον αντίστοιχο ιδιόχωρο προκύπτει

$$V_f(1) = \left\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \mid \ a = b = 0\right\} = \{c\} = \langle 1 \rangle.$$

Άρα το $\{1\}$ είναι βάση του $V_f(1)$. □

Πρόταση 3.2.2. Έστω $f\colon V \to V$ γραμμική απεικόνιση και $A = (f\colon \hat{a}, \hat{a})$ με $\hat{a}$ βάση του V και $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε ισχύουν τα εξής :

(i) λ ιδιοτιμή της f αν και μόνο αν λ ιδιοτιμή του A

(ii) Έστω $v \in V$. Τότε $v \in V_f(\lambda)$ αν και μόνο αν $[v]_{\hat{a}} \in V_A(\lambda)$.

(iii) Το σύνολο $\{v_1, \cdots, v_m\}$ είναι βάση του $V_f(\lambda)$ αν και μόνο αν $\{[v_1]_{\hat{a}}, \cdots, [v_m]_{\hat{a}}\}$ είναι βάση του $V_A(\lambda)$.

Απόδειξη. (i) Έστω λ ιδιοτιμή της f. Ισοδύναμα, υπάρχει $v \in V, v \neq 0$ με $f(v) = \lambda v$, άρα η απεικόνιση $f - \lambda \cdot 1_V$ είναι μη αντιστρέψιμη. Ισοδύναμα, ο $(f - \lambda 1_V\colon \hat{a}, \hat{a}) = A - \lambda I_n$ είναι μη αντιστρέψιμος με $\det(A - \lambda I_n) = 0$, ισοδύναμα το λ είναι ιδιοτιμή του A.

(ii) Έστω $v \in V_f(\lambda) \Leftrightarrow f(v) = \lambda v \Leftrightarrow [f(v)]_{\hat{a}} = [\lambda v]_{\hat{a}} \Leftrightarrow A[v]_{\hat{a}} = \lambda[v]_{\hat{a}} \Leftrightarrow [v]_{\hat{a}} \in V_A(\lambda)$.

(iii) Έστω, η γραμμική απεικόνιση $g : V \to V, v \to [v]_{\hat{a}}$ η οποία είναι ισομορφισμός.Ο περιορισμός δίνει επίσης ισομορφισμό $V_f(\lambda) \to V_A(\lambda)$ από το (ii).

□

Παράδειγμα 3.2.3. Έστω $V = \mathbb{R}_2[x], \hat{a} = (a_1, a_2, a_3)$ με $a_1 = 1, a_2 = x + 1, a_3 = x^2 + 1$ και $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, όπου

$$A = (f : \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Να δείξετε οτι $\hat{a}$ βάση του V.

(b) Αληθεύει ότι $a_1 - a_3$ είναι ιδιοδιάνυσμα ;

(c) Να βρείτε βάση για κάθε ιδιόχωρο της f.

(d) Να βρείτε βάση για κάθε ιδιόχωρο του A.

Απόδειξη. (a) Τα a_1, a_2, a_3 παράγουν (δείξτε γιατί) το V και το πλήθος τους είναι ίσο με $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, δηλαδή είναι γραμμικά ανεξάρτητα άρα και βάση του $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Παρατηρήστε πως ισχύει ότι $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = a_2$. Θεωρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει το εξής :

$$f(a_1 - a_3) = \lambda(a_1 - a_3) \Leftrightarrow f(a_1) - f(a_3) = \lambda(a_1 - a_3) \Leftrightarrow \lambda(a_1 - a_3) = 0 \xLeftrightarrow{a_1 - a_3 \neq 0} \lambda = 0.$$

Άρα το $a_1 - a_3$ είναι ιδιοδιάνυσμα της f με αντίστοιχη ιδιοτιμή το 0.

(c) Έστω $v \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} & f(v) = \lambda v \Leftrightarrow f(r_1a_1 + r_2a_2 + r_3a_3) = \lambda(r_1a_1 + r_2a_2 + r_3a_3) \\ \Leftrightarrow\ & r_1 f(a_1) + r_2 f(a_2) + r_3 f(a_3) = \lambda r_1 a_1 + \lambda r_2 a_2 + \lambda r_3 a_3 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda r_1 a_1 + a_2(\lambda r_2 - r_1 - r_2 - r_3) + \lambda r_3 a_3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \lambda r_1 = 0 \\ r_1 + r_2(1-\lambda) + r_3 = 0 \\ \lambda r_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα έχει μη-μηδενική λύση αν και μόνο αν ισχύει $\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$. Άρα, έχουμε ότι

(i) $V_f(0) = \{r_1a_1 + r_2a_2 + r_3a_3 \mid r_1 + r_2 + r_3 = 0\} = \langle a_2 - a_1, a_3 - a_1 \rangle$ γραμμικά ανεξάρτητα (δείξτε γιατί), άρα $\{a_2 - a_1, a_3 - a_1\}$ είναι βάση του $V_f(0)$.

(ii) $V_f(1) = \{r_1a_1 + r_2a_2 + r_3a_3 \mid r_1 = r_3 = 0\} = \{r_2a_2\} = \langle a_2 \rangle$. Άρα ισχύει ότι $\{a_2\}$ βάση του $V_f(1)$.

(d) Από την Πρόταση 3.2.2 έχουμε ότι $\{[a_3 - a_1]_{\hat{a}}, [a_2 - a_1]_{\hat{a}}\}$ είναι βάση του $V_A(0)$ και $\{[a_2]_{\hat{a}}\}$ βάση του $V_A(1)$.

□

3.3 Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Ορισμός 3.3.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $A = (a_{ij})$. Το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A είναι το

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - x & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.3.1.

1. Αν $A = (a)$, τότε ισχύει ότι $\chi_A(x) = \det(a - x) = a - x$.
2. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, τότε ισχύει ότι $\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 3 \\ 4 & 2-x \end{pmatrix} = (x+2)(x-5)$.
3. Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, τότε ισχύει ότι $\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 3 & 4 \\ 0 & 1-x & 3 \\ 0 & 4 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)(2+x)(x-5)$.

Ιδιότητες 3.3.1. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε ισχύουν τα εξής :

(i) $\chi_A(x) = \chi_{A^t}(x)$

(ii) Αν A τριγωνικός με $A = (a_{ij})$, τότε $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - x)$.

(iii) Έστω $A_i \in \mathbb{F}^{n_i \times n_i}$ για $i = 1, \cdots, s$ και έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & A_2 & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}.$$

Τότε ισχύει ότι

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x).$$

Απόδειξη. (i) Έχουμε πως $\chi_{A^t}(x) = \det(A^t - xI_n) = \det(A - xI_n)^t = \det(A - xI_n) = \chi_A(x)$.

(ii) Έστω A άνω τριγωνικός με $A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \cdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, τότε θεωρώντας το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο έχουμε

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-x & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \cdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn}-x \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - x).$$

(iii) Για την απόδειξη της τρίτης ιδιότητας θα αναχθούμε στην χρήση ενός βοηθητικού λήμματος.

Λήμμα 3.3.1. (α′) Έστω πίνακες $B_1 \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1}, B_2 \in \mathbb{F}^{n_2\times n_2}$ με $n = n_1 + n_2$ και $B = \begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$. Τότε ισχύει ότι $\det B = \det B_1 \cdot \det B_2$.

(β′) Έστω $B_i \in \mathbb{F}^{n_i \times n_i}$ και $B = \begin{pmatrix} B_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \cdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & B_s \end{pmatrix}$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$. Τότε ισχύει ότι

$$\det B = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdots \det B_s.$$

Απόδειξη Λήμματος.

(α′) Για $B_1 = I_{n_1}$ ή $B_2 = I_{n_2}$ το ζητούμενο αποδεικνύεται άμεσα αφού για $B_1 = I_{n_1}$ εφαρμόζουμε επαγωγή στο n με αναπτυγμα ως προς τη πρώτη στήλη $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ του πίνακα B. Στην άλλη περίπτωση αναπτύσσουμε ως προς την τελευταία γραμμή. Στην γενική περίπτωση παρατηρούμε ότι ισχύει το εξής :

$$\begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Τότε είναι άμεσο ότι $\det B = \det B_1 \cdot \det B_2$.

(β′) Το ζητούμενο αποδεικνύεται άμεσα με χρήση επαγωγής στο n μέσω του (α′).

Απόδειξη ιδιότητας.

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} A_1 - xI_{n_1} & * & * & * \\ 0 & \ddots & & * \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & A_s - xI_{n_s} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{s} \det(A_i - xI_{n_i}) = \prod_{i=1}^{s} \chi_{A_i}(x).$$

□

Παράδειγμα 3.3.2. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & & & \\ 4 & 2 & & * & \\ & & 1 & 2 & 3 \\ & 0 & 0 & 4 & 5 \\ & & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ με $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ και $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Τότε έχουμε ότι $\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x) \cdot \chi_{A_2}(x) = (x+2)(x-5)(1-x)(4-x)(6-x)$.

3.4 Βαθμός και σχέση $\chi_A(x)$ με $\mathrm{Tr}(A), \det A$

Λήμμα 3.4.1. Έστω $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Τότε το $\det B$ είναι άθροισμα όρων της μορφής $(-1)^{\kappa} b_{1j_1} \cdots b_{nj_n}$, όπου $B = (b_{ij})$ και $(j_1, \cdots, j_n)$ αναδιάταξη του $\{1, \cdots, n\}$ (κάθε όρος έχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε γραμμή και στήλη).

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο εφαρμόζοντας επαγωγή στο n .

- **Βάση.** Για $n = 1$ το ζητούμενο ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Για $n \in \mathbb{N}$ αναπτύσσουμε ως προς τη πρώτη γραμμή και εφαρμόζουμε επαγωγική υπόθεση.

□

Πρόταση 3.4.1. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Τότε ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $\chi_A(x)$ είναι $(-1)^n$. Μάλιστα αν $A = (a_{ij})$ έχουμε ότι $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - x) + \psi(x)$ με $\deg \psi(x) \leq n - 2$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = A - xI_n = \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε τον όρο $(-1)^{\kappa} b_{1j_1} \cdots b_{nj_n}$ με $(j_1, \cdots, j_n) \neq (1, \cdots, n)$. Άρα υπάρχει t με $j_t \neq t$. Τότε ισχύει $b_{tj_t} \neq a_{tt} - x$. Δηλαδή $b_{tj_t} = a_{ts}$, για κάποιο $t \neq s$. Επειδή το a_{ts} ανήκει στη στήλη s του B στο αρχικό γινόμενο δεν έχουμε άλλο στοιχείο της s στήλης. Επομένως στο αρχικό γινόμενο κανένα στοιχείο δεν είναι το $a_{ss} - x$. Άρα $\deg \psi(x) \leq n - 2$.

Μένει να δείξουμε ότι στο άθροισμα του Λήμματος 3.4.1 ο όρος $(a_{11} - x) \cdots (a_{nn} - x)$ εμφανίζεται με συντελεστή $+1$. Πράγματι, (i) ο όρος $(a_{11} - x) \cdots (a_{nn} - x)$ εμφανίζεται στο άθροισμα του (με επαγωγή στο n και ανάπτυγμα ως προς τη πρώτη γραμμή) και (ii) δεν απλοποιείται με άλλο όρο λόγω των παραπάνω. □

Παράδειγμα 3.4.1. Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ ισχύει ότι $\chi_A(x) = (a - x)(d - x) - bc$.

Πόρισμα 3.4.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $\chi_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Τότε ισχύουν τα εξής :

(i) $\det A = a_0$ και $\mathrm{Tr}(A) = (-1)^{n-1} a_{n-1}$,

(ii) και επίσης αν $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$, τότε $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ και $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Απόδειξη. (i) Είναι σαφές ότι $\det A = \det(A - 0I_n) = \chi_A(0) = a_0$. Από Πρόταση 3.4.1 έχουμε το εξής :

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - x) + \psi(x), \quad \deg \psi(x) \leq n - 2, \; A = (a_{ij}).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^{n-1} έχουμε

$$a_{n-1} = (-1)^n (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) = (-1)^n \mathrm{Tr}(A).$$

(ii) Αρχικά έχουμε ότι $\det A = \det(A - 0 \cdot I_n) = \chi_A(0) = (\lambda_1 - 0)\cdots(\lambda_n - 0) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Έπειτα παρατηρήστε, ότι από (i) έχουμε $\mathrm{Tr}(A) = (-1)^n a_{n-1} = (-1)^n[(-1)^n(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)] = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

□

Παράδειγμα 3.4.2. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Από το Πόρισμα 3.4.1 (i) έχουμε ότι ισχύει η εξής ισότητα

$$\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A) = x^2 - 3x - 10.$$

Ακόμη έχουμε ότι $\chi_A(x) = (5-x)(2+x)$, δηλαδή οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = -2$.Τελικά λοιπόν από το Πόρισμα 3.4.1 (ii) προκύπτει ότι $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 5 - 2 = 3$ και $\det A = \lambda_1\lambda_2 = 5(-2) = -10$.

Πρόταση 3.4.2. Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι όμοιοι, τότε ισχύει ότι $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.

Απόδειξη. Αφού ο A είναι όμοιος με τον B υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος με $B = P^{-1}AB$. Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να δείξει ότι για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ισχύει το εξής :

$$\varphi(B) = P^{-1}\varphi(A)P.$$

Με χρήση του παραπάνω έχουμε

$$\chi_B(x) = \det(B - xI_n) = \det(P^{-1}AP - xI_n) = \det\left[P^{-1}(A - xI_n)P\right] ,$$

δηλαδή τελικά έχουμε ότι :

$$\chi_B(x) = \det P^{-1} \cdot \det(A - xI_n) \cdot \det P = \det(A - xI_n) = \chi_A(x).$$

□

Ορισμός 3.4.1. Έστω $f :: V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση.Αν $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$ με $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του V ορίζουμε το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της f και συμβολίζουμε ως $\chi_f(x) = \chi_A(x)$.

3.5 Ασκήσεις Κεφαλαίου 3.

Ομάδα Α : $1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 32, 34, 35$,
Ομάδα Β: $7, 8, 12, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 30, 32, 36$,
Ομάδα Γ : $27, 28$

Άσκηση 3.1. a. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4} \quad \text{και} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 1}.$$

Είναι το X ιδιοδιάνυσμα του A ; Είναι το 6 ιδιοτιμή του A ;

b. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Άσκηση 3.2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$.

a. Δείξτε ότι αν $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα X, τότε το $\varphi(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $\varphi(A)$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το X.

b. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Βρείτε (χωρίς να γίνουν πράξεις) μια ιδιοτιμή και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του $B = A^{1821} + I_3$.

c. * Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Δείξτε ότι για κάθε ιδιοτιμή λ του $\varphi(A)$ υπάρχει ιδιοτιμή λ_i του A τέτοια ώστε $\lambda = \varphi(\lambda_i)$.

Άσκηση 3.3. Έστω $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ και $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

a. Αληθεύει ότι το X είναι ιδιοδιάνυσμα του A ; Αν ναι, να βρεθούν δύο διαφορετικές βάσεις του ιδιόχωρου $V_A(\lambda)$, όπου λ η ιδιοτιμή στην οποία αντιστοιχεί το παραπάνω ιδιοδιάνυσμα.

b. Αληθεύει ότι το X είναι ιδιοδιάνυσμα του $A^{1821} + I_3$;

c. Βρείτε πίνακα $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $X \in V_B(3)$.

Άσκηση 3.4. Βρείτε τα ιδιοδιανύσματα του $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ στις περιπτώσεις

a. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

b. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Άσκηση 3.5. Να βρεθεί μια βάση για κάθε ιδιόχωρο των πινάκων

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

b. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Άσκηση 3.6. Υπολογίστε για τις διάφορες τιμές του a τις διαστάσεις των ιδιόχωρων του $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Άσκηση 3.7. Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε για κάθε $j = 1, \cdots, n$, ισχύει $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$. Δείξτε τα εξής.

a. Υπάρχει μη μηδενικό $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ τέτοιο ώστε $AX = X$.

b. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = (b_{ij})$, τότε για κάθε $j = 1, \cdots, n$, ισχύει $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij} = 1$.

Άσκηση 3.8. Έστω $\lambda \neq \mu$ δύο ιδιοτιμές πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u, v. Τότε

a. τα u, v είναι γραμμικά ανεξάρτητα και

b. για κάθε $a, b \in \mathbb{F} - \{0\}$, το $au + bv$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A.

Άσκηση 3.9. a. Αληθεύει ότι το 2 είναι ιδιοτιμή της γραμμικής απεικόνισης

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ f(x, y, z, w) = (x + w, 2y + z, 3z + w, x + w)\ ;$$

Αληθεύει ότι το $\big(1, 0, -1, 2\big)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της f ;

b. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x - y.2x + 3y + 2z, x + y + 2z).$$

c. Έστω $f : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από $f(e_1) = -e_2$ και $f(e_2) = e_1$, όπου $\hat{e} = \{e_1, e_2\}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{F}^2$.Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της f όταν (i) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ και (ii) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος (i) .

Άσκηση 3.10. a. Να βρεθούν οι πιθανές ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης $f : V \to V$ σε κάθεμια από τις περιπτώσεις

(i) $f^2 = 1_V$,

(ii) $f^2 = f$.

b. Στη συνέχεια δείξτε την εξής πρόταση.Αν $\varphi(f) = 0$ για κάποιο $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε κάθε ιδιοτιμή της $\mathbb{F}$- γραμμικής απεικόνισης $f : V \to V$ είναι ρίζα του $\varphi(x)$.

c. Δείξτε την εξής πρόταση. Αν $\varphi(A) = 0$ για κάποιο $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τότε κάθε ιδιοτιμή του A είναι ρίζα του $\varphi(x)$.

Άσκηση 3.11. a. Για ποια $a \in \mathbb{R}$ το $(1, 1)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της γραμμικής απεικόνισης

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x + ay, 2x + y) \ ;$$

b. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των γραμμικών απεικονίσεων

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (4x, 2y - 5z, y - 2z)$,
2. $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\ f(x, y, z) = (4x, 2y - 5z, y - 2z)$.

Άσκηση 3.12. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, με $f(x^2 + x) = 2x^2 + 2x$, $f(x + 1) = 2x + 3$ και $f(1) = x + 3$.

a. Βρείτε τα ιδιοδιανύσματα της f και μια βάση για κάθε ιδιόχωρο της f.

b. Αληθεύει ότι η f είναι ισομορφισμός ;

c. Αληθεύει ότι η $f^4 - 6f - 4 \cdot 1_{\mathbb{R}_2[x]}$ είναι ισομορφισμός ;

d. Βρείτε δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της $f^4 - 6f - 4 \cdot 1_{\mathbb{R}_2[x]}$.

Άσκηση 3.13. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των γραμμικών απεικονίσεων

a. $g : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x],\ g(\phi(x)) = \phi(1)x$

b. $h : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x],\ h(\phi(x)) = \phi'(x)$, όπου $\phi'(x)$ είναι η παράγωγος του $\phi(x)$.

Άσκηση 3.14. Έστω $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ με $\chi_A(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$.

a. Είναι ο A αντιστρέψιμος ;

b. Είναι ο $(A - 3I_3)(A - 4I_3)$ αντιστρέψιμος ;

c. Υπολογίστε την ορίζουσα του $A^2 - 2A - 15I_3$.

d. Αληθεύει ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ ώστε για τη γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\ f(x,y,z) = (x+2y+3z, 2y+3z, 3z)\ ,$$

να ισχύει $(f : \hat{a}, \hat{a}) = A$;

e. Να βρεθεί το $\chi_{A^2}(x)$.

f. Αληθεύει ότι υπάρχει $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ τέτοιος ώστε $AB - BA = A^k$ για κάποιο θετικό ακέραιο k ;

g. Αληθεύει ότι υπάρχει ακέραιος $k > 1$ με $A^k = A^t$, όπου A^t είναι ο ανάστροφος του A ;

Άσκηση 3.15. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, όπου ο A είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$. (Σημείωση. Ισχύει το συμπέρασμα και χωρίς την υπόθεση ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, βλ. άσκηση 27.)

Άσκηση 3.16. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος και $x_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, όπου $a_0 \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\chi_{A^{-1}}(x) = (-1)^n \left[x^n + \frac{a_{n-1}}{a_0}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_0} + \frac{(-1)^n}{a_0}\right].$$

Άσκηση 3.17. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

a. Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $(-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)$.

b. Δείξτε ότι αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A, τότε το

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A^t.

Άσκηση 3.18. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

Άσκηση 3.19. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}.$$

Άσκηση 3.20. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος.

a. Δείξτε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν το $\dfrac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.

b. Έστω ότι ο A είναι όμοιος με τον A^{-1} και n περιττός.Δείξτε ότι το 1 ή το -1 είναι ιδιοτιμή του A.

Άσκηση 3.21. Έστω $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ τέτοιος ώστε $\chi_A(x) \in \mathbb{R}[x],\ \det A = -13,\ \mathrm{Tr}(A) = 4$ και μια ιδιοτιμή του A είναι το $2 - 3i$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A.

Άσκηση 3.22. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος.Δείξτε ότι αν ο A είναι όμοιος με τον $-A$, τότε το n είναι άρτιος, $n = 2m$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι της μορφής $(x^2 - \rho_1)\cdots(x^2 - \rho_m)$, όπου $n \geq 2$.

Άσκηση 3.23. Βρείτε τους ιδιόχωρους της γραμμικής απεικόνισης $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n},\ A \mapsto A^t$, όπου $n \geq 2$.

Άσκηση 3.24. Θεωρούμε τους διαγώνιους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

a. Οι A, B είναι όμοιοι.

b. Υπάρχει μετάθεση $\sigma \in S_n$ τέτοια ώστε $b_i = a_{\sigma(i)}$ για κάθε $i = 1, \cdots, n$.

c. $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.

Άσκηση 3.25. Έστω $a, b \in \mathbb{F}$. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

Άσκηση 3.26. Έστω $a, b \in \mathbb{F}$ με $a \neq b$. Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ b & 0 & a & \cdots & a \\ b & b & 0 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}$$

είναι το $\dfrac{(-1)^n}{a-b}\left[a(x+b)^n - b(x+a)^n\right]$.

Άσκηση 3.27. Έστω $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$. Δείξτε ότι $(-1)^n x^n \chi_{AB}(x) = (-1)^m x^m \chi_{BA}(x)$. (Συνεπώς αν $m = n$, τότε $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.)

Άσκηση 3.28. Έστω $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$ και $C = (a_i bj) \in \mathbb{F}^{n\times n}$.Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση (ή αλλιώς) βρείτε το $\chi_C(x)$ και τις ιδιοτιμές του C.

Άσκηση 3.29. Έστω $n \geq 1$ και

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2n\times 2n}.$$

Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A. Βρείτε τη διάσταση κάθε ιδιόχωρου του A.

Άσκηση 3.30. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ και $D = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$. Τότε

a. $\chi_C(x) = \chi_{A+B}(x) \cdot \chi_{A-B}(x)$.

b. $\chi_D(x) = \chi_{A+iB}(x) \cdot \chi_{A-iB}(x)$.

c. Αν οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ είναι οι εξής

$$2\lambda_1, \cdots, 2\lambda_n, \underbrace{0, \cdots 0}_{n}.$$

Άσκηση 3.31. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Δίνεται ότι οι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι όμοιοι, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν οι a, b.

Άσκηση 3.32. Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της γραμμικής απεικόνισης $f^2 = f \circ f$, όπου

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ f(x, y, z) = (0, x, y).$$

Άσκηση 3.33. Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της γραμμικής απεικόνισης $f^2 = f \circ f$, όπου

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ f(x, y, z) = (0, x, y).$$

Άσκηση 3.34. Δίνεται διατεταγμένη βάση $\hat{u} = (u_1, u_2, u_3)$ του $\mathbb{R}^3$ και η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με αντίστοιχο πίνακα $A = (f : \hat{u}, \hat{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Βρείτε το $\chi_f(x)$ και το $\chi_{f^2}(x)$.

b. Αληθεύει ότι $u_1 + u_2 + 2u_3$ είναι ιδιοδιάνυσμα της f ; Ίδιο ερώτημα για το u_1.

c. Βρείτε μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A.

d. Βρείτε μια βάση για κάθε ιδιόχωρο της f.

e. Ξέρουμε ότι ισχύει $V_f(0) \subseteq V_{f^2}(0)$.Αληθεύει ότι έχουμε ισότητα ;

f. Αληθεύει ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε $f(g(v)) = v$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^3$;

Άσκηση 3.35. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ και $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \ f(X) = AX - XA$.Αφού δείξετε ότι η f είναι γραμμική, βρείτε μια βάση για κάθε ιδιόχωρο της f.

Άσκηση 3.36. Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των συναρτήσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και τον υπόχωρο V που παράγεται από τις συναρτήσεις $\sin x, \cos x$. Βρείτε μια βάση κάθε ιδιόχωρου των γραμμικών απεικονίσεων

a. $f : V \to V, \ f(\phi(x)) = \phi'(x)$ (παράγωγος) ,

b. $g : V \to V, \ g(\phi(x)) = \phi''(x)$ (δεύτερη παράγωγος) .

Άσκηση 3.37. Δείξτε ότι για κάθε

a. $A \in \mathbb{C}^{2\times 2},\ \chi_A(x) = x^2 - Tr(A)x + \det_A$,

b. $A \in \mathbb{C}^{3\times 3},\ \chi_A(x) = -x^3 + Tr(A)x^2 - Tr(adj(A))x + \det A$.

Άσκηση 3.38. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα.

a. Αν το λ είναι ιδιοτιμή του $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και το μ ιδιοτιμή του $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τότε το $\lambda + \mu$ είναι ιδιοτιμή του $A + B$.

b. Αν το λ είναι ιδιοτιμή του $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και το μ ιδιοτιμή του $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τότε το $\lambda\mu$ είναι ιδιοτιμή του AB.

c. Κάθε $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή.

d. Κάθε $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή.

e. Αν το 2 είναι ιδιοτιμή του A^2, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε το $\sqrt{2}$ είναι ιδιοτιμή του A.

f. Αν $\chi_A(x) = \chi_B$, όπου $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τότε οι A, B είναι όμοιοι.

g. Έστω ότι οι $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Τότε οι $\phi(A), \phi(B)$ είναι όμοιοι για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$.

h. Υπάρχει $A \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ με ιδιοτιμές τις $0, 1, 2, 3$.

i. Αν v είναι ιδιοδιάνυσμα της γραμμικής απεικόνισης $f : V \to V$ και $v \in \ker f$, τότε το 0 είναι ιδιοτιμή της f.

j. Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $\chi_A(x) = -(x^2-1)(x-5)$.Τότε υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ και διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του $\mathbb{R}^3$ με $f(1,0,0) = 3\cdot(1,0,0)$ και $(f : \hat{a}, \hat{a}) = A$.

k. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.Αν το -1 είναι ιδιοτιμή του A, τότε υπάρχει μη μηδενικό $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ με $A^2X = X$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΑΓΩΝΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

4.1 Διαγωνίσιμοι Πίνακες

Ορισμός 4.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Θα λέμε ότι ο A είναι **διαγωνίσιμος** αν υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος με την ιδιότητα $P^{-1}AP = \Delta$, όπου Δ διαγώνιος.

Παρατήρηση 4.1.1. Έστω $\Delta = P^{-1}AP$ με $\Delta = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουμε $\chi_A(x) = \chi_\Delta(x) = (a_1 - x)\cdots(a_n - x)$. Έδω $a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι ιδιοτιμές του A.

Παράδειγμα 4.1.1.

a. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Τότε παρατηρούμε ότι $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(-2, 5)$. Άρα ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος.

b. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Θα δείξουμε ότι A δεν είναι διαγωνίσιμος. Πράγματι αν υπήρχε αντιστρέψιμος P με $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(a_1, a_2)$, τότε από Παρατήρηση 4.1.1 και από ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $a_1 = 1$ και $a_2 = 1$ έχουμε ότι $P^{-1}AP = I_2 \Leftrightarrow A = I_2$, το οποίο είναι άτοπο.

c. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Ο A δεν είναι διαγωνίσιμος, καθώς $\chi_A(x) = x^2 + 1$ που δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή ο A δεν έχει ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$ και από Παρατήρηση 4.1.1 δεν είναι διαγωνίσιμος.

d. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Ο A είναι διαγωνίσιμος, αφού για $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}$, αντιστρέψιμος, ισχύει ότι $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(i, -i)$.

Ερώτημα 4.1.1. Μέσω των παραδειγμάτων τίθενται βασικά ερωτήματα. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$

1. Πότε ο A είναι διαγωνίσιμος ;
2. Αν ο A είναι διαγωνίσιμος, πως βρίσκουμε πίνακες P και Δ ώστε $P^{-1}AP = \Delta$;

Υπενθύμιση 4.1.1. Αν $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $A^{(i)}$ συμβολίζουμε την **i-στήλη** του A. Για παράδειγμα αν $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ τότε έχουμε ότ ισχύει $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Με αυτό το συμβολισμό έχουμε

$$A = \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}\right).$$

(i) Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τότε ισχύει $(AB)^{(i)} = AB^{(i)}$.

(ii) Έστω $\hat{E} = (E_1, E_2, \cdots, E_n)$ η συνήθης διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$. Τότε $I_n^{(i)} = E_i$ και μάλιστα $A^{(i)} = AE_i$.

Απόδειξη. (i) Αν $B = \left(B^{(1)}, B^{(2)}, \cdots, B^{(n)}\right)$, τότε ισχύει $AB = (AB^{(1)}, AB^{(2)}, \cdots, AB^{(n)})$, και από ορισμό γινομένου πινάκων, έχουμε $(AB)^{(i)} = AB^{(i)}$.

(ii) Παρατηρήστε ότι $AE_i = AI_n^{(i)} = (AI_n)^{(i)} = A^{(i)}$.

□

Παρατήρηση 4.1.2. Έστω $A, P, \Delta \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με P αντιστρέψιμο, ώστε $P^{-1}AP = \Delta$ με Δ όχι απαραίτητα διαγώνιος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(i) Η i-στήλη του P είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ.

(ii) Η $i-$στήλη του Δ είναι λE_i.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $P^{-1}AP = \Delta$. Τότε έχουμε άμεσα πως $AP = P\Delta$.

Υποθέτουμε ότι $AP^{(i)} = \lambda P^{(i)}$. Τότε έχουμε ότι $\Delta^{(i)} = (P^{-1}AP)^{(i)} = P^{-1}AP^{(i)}$, δηλαδή

$$\Delta^{(i)} = P^{-1}\lambda P^{(i)} = \lambda P^{-1}P^{(i)} = \lambda(I_n)^{(i)} = \lambda E_i \ .$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\Delta^{(i)} = \lambda E_i$. Τότε έχουμε ότι $P\Delta^{(i)} = P\lambda E_i = \lambda PE_i = \lambda P^{(i)}$. Άρα ισχύει ότι $AP = \lambda P^{(i)}$ με $P^i \neq 0$, αφού ο P είναι αντιστρέψιμος. □

Θεώρημα 4.1.1 (1ο Κριτήριο Διαγωνισιμότητας)**.** Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(i) Ο A είναι διαγωνίσιμος.

(ii) Υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A.

Επίσης αν $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, τότε θέτοντας $P = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ έχουμε P αντιστρέψιμος με $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος με $P^{-1}AP = \Delta$, διαγώνιος. Επειδή Δ διαγώνιος, τότε ισχύει ότι $\Delta^{(i)} = \lambda_i E_i$ και από Παρατήρηση 4.1.2 έπεται ότι $P^{(i)}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A, για κάθε $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Όμως $\left\{P^{(i)}, P^{(2)}, \cdots, P^{(n)}\right\}$ βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$, αφού P αντιστρέψιμος.

Αντίστροφα, έστω $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A. Άρα $Ax_i = \lambda x_i$, για κάθε $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Θέτουμε $P = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, δηλαδή $P^{(i)} = x_i$. Επειδή $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ ο P είναι αντιστρέψιμος. Άρα, από Παρατήρηση 4.1.2, έχουμε ότι $(P^{-1}AP)^{(i)} = \lambda_i E_i$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι ο $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος.

□

Παράδειγμα 4.1.2. a. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Τότε έχουμε ότι $\chi_A(x) = (x+2)(x-5)$ με $V_A(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ και $V_A(5) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$. Τα στοιχεία $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^{2\times 1}$, αφού ισχύει ότι $\det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$. Άρα ο A είναι διαγωνίσιμος. Θέτοντας $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ γνωρίζουμε ότι P είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ισχύει ότι $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(-2, 5)$.

b. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Τότε υπολογίζοντας έχουμε ότι ισχύει $\chi_A(x) = (2-x)^2(3-x)$ με $V_A(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ και $V_A(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Αν x_1, x_2, x_3 είναι ιδιοδιανύσματα του A, τότε υπάρχουν δύο γραμμικά εξαρτημένα ιδιοδιανύσματα. Άρα προκύπτει ότι ο A δεν είναι διαγωνίσιμος (εξηγήστε γιατί).

c. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Τότε υπολογίζοντας, έχουμε ότι προκύπτει ότι $\chi_A(x) = (2+x)^2(4-x)$ με $V_A(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ και $V_A(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Παρατηρήστε ότι τα στοιχεία $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Άρα ο A είναι διαγωνίσιμος και για $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ γνωρίζουμε πως είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(-2, -2, 4)$.

Πρόταση 4.1.1. (i) Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ διαγωνίσιμος και ένα πολυώνυμο $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Τότε έχουμε ότι $\varphi(A)$ είναι διαγωνίσιμος.

(ii) Αν A διαγωνίσιμος και αντιστρέψιμος, τότε $\varphi(A^{-1})$ είναι διαγωνίσιμος.

Απόδειξη. (i) Ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος, δηλαδή υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος, ώστε $P^{-1}AP = \Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\varphi(P^{-1}AP) = P^{-1}\varphi(A)P$ και αφού $\varphi(P^{-1}AP) = \varphi(\Delta)$, ισχύει πως $P^{-1}\varphi(A)P = \varphi(\Delta)$. Τώρα αρκεί να δείξουμε ότι $\varphi(\Delta)$ είναι διαγώνιος. Πράγματι, παρατηρούμε ότι :

$$\varphi\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}.$$

Δηλαδή ισχύει ότι $P^{-1}\varphi(A)P = \operatorname{diag}(\varphi(\lambda_1), \cdots, \varphi(\lambda_n))$. Άρα έχουμε ότι $\varphi(A)$ είναι διαγωνίσιμος .

(ii) Επειδή A είναι αντιστρέψιμος για κάθε ιδιοτιμή λ του A έχουμε ότι $\lambda \neq 0$. Άρα ισχύει ότι υπάρχει P αντιστρέψιμος ώστε

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad \lambda_i \neq 0 \ ,$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Τότε παρατηρήστε ότι ισχύει το εξής :

$$\left(P^{-1}AP\right)^{-1} = (\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n))^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}A^{-1}P = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

Άρα ο A^{-1} είναι διαγωνίσιμος.

□

4.2 Το Μεγάλο Κριτήριο Διαγωνισιμότητας

Λήμμα 4.2.1. Αν $X_i \in V(\lambda_i)$ για $i = 1, \cdots, t$ με $X_1 + \cdots + X_t = 0$, τότε $X_i = 0$, για κάθε $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$.

Απόδειξη. Το ζητούμενο έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 3.1.1 □

Πόρισμα 4.2.1. Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Το ζητούμενο έχει απόδειχθεί στο Πόρισμα 3.1.2 □

Πόρισμα 4.2.2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και λ_1, λ_2 ιδιοτιμές του με $\lambda_1 \neq \lambda_2$.Τότε $V_A(\lambda_1) \cap V_A(\lambda_2) = \{0\}$.

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεσο από το Λήμμα 4.2.1 □

Λήμμα 4.2.2. (i) Αν B_i μια βάση του $V_A(\lambda_i)$,για $i = 1, \cdots, t$, τότε μια βάση του $V_A(\lambda_1) + \cdots + V_A(\lambda_t)$ είναι η $B_1 \cup \cdots \cup B_t$.

(ii) $\dim \sum_i V_A(\lambda_i) = \sum_i \dim V_A(\lambda_i)$.

Απόδειξη. (i) Έστω B_i βάση του $V_A(\lambda_i)$ με $B_i = \{b_{i_1}, \cdots, b_{i_{m_i}}\}$. Από ορισμό του αθροίσματος υπόχωρων είναι άμεσο πως $\sum_i V_A(\lambda_i) = \left\langle \bigcup_i B_i \right\rangle$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\bigcup_i B_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.Πράγματι, εστω ότι υπάρχουν $a_{ij} \in \mathbb{F}$ ώστε

$$(a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1m_1}b_{1m_1}) + \cdots + (a_{t1}b_{t1} + \cdots + a_{tm_t}b_{tm_t}) = 0.$$

Από το Πόρισμα 4.2.2 το ζητούμενο έπεται άμεσα.

(ii) Από (i) Έχουμε πως $\dim \sum_i V_A(\lambda_i) = |\bigcup_i B_i| = \sum_i |B_i|$, από Πόρισμα 4.2.2. Άρα συμπεραίνουμε ότι $\dim \sum_i V_A(\lambda_i) = \sum_i \dim V_A(\lambda_i)$.

□

Θεώρημα 4.2.1 (Μεγάλο Κριτήριο Διαγωνισιμότητας)**.** Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Ο A είναι διαγωνίσιμος.

(ii) Υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A.

(iii) $V_A(\lambda_1) + V_A(\lambda_2) + \cdots + V_A(\lambda_k) = \mathbb{F}^{n\times 1}$.

(iv) $\dim V_A(\lambda_1) + \dim V_A(\lambda_2) + \cdots + \dim V_A(\lambda_k) = n$.

(v) $\chi_A(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k}$ με $\dim V_A(\lambda_i) = n_i$ για κάθε $i = 1, \cdots, k$.

Απόδειξη.

- Η ισοδυναμία των (i) και (ii) έχει αποδειχθεί στο Θεώρημα 4.1.1
- (iii) $\leftrightarrow$ (iv) Από το Λήμμα 4.2.2 έχουμε ότι $\sum_i V_A(\lambda_i) = \mathbb{F}^{n\times 1} \Leftrightarrow \dim \sum_i V_A(\lambda_i) = n$, αφού $\sum_i V_A(\lambda_i) \leq \mathbb{F}^{n\times 1}$.
- (ii) $\to$ (iii) Η συνεπαγωγή αποδεικνύεται άμεσα.
- (iii) $\to$ (ii) Από Λήμμα 4.2.2, αν B_i βάση του $V_A(\lambda_i)$, τότε $\bigcup_i B_i$ βάση του $\sum_i V_A(\lambda_i)$, όπου έπεται το ζητούμενο.
- (i) $\to$ (v) Ο A είναι διαγωνίσιμος, άρα είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα $\mathrm{diag}(m_1, \cdots, m_n)$. Επομένως είναι σαφές ότι :

$$\chi_A(x) = (m_1 - x) \cdots (m_n - x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k} \ ,$$

με $n_1 + \cdots + n_k = n$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει το εξής

$$\dim V_A(\lambda_i) = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_i I_n) = n - \operatorname{rank}(\Delta - \lambda_i I_n) = n - (n - n_i) = n_i \ ,$$

για κάθε $i = 1, 2, \cdots, k$.

- (v) $\to$ (iv) Για κάθε $i = 1, \cdots, k$ ισχύει ότι $\dim V_A(\lambda_i) = n_i$, άρα προκύπτει ότι

$$\sum_i \dim V_A(\lambda_i) = \sum_i n_i = n.$$

□

Πόρισμα 4.2.3. Αν $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ έχει n διακεκριμένες τιμές, τότε είναι διαγωνίσιμος.

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεσο από το (iv) του Θεωρήματος 4.2.1 □

Παράδειγμα 4.2.1. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Τότε, από το Πόρισμα 4.2.3, ο A είναι διαγωνίσιμος αφού 1,4,6 είναι ιδιοτιμές του οι οποίες είναι διακεκριμένες .

Ορισμός 4.2.1. Έστω $(x-\lambda)^{m(\lambda)}$ η μέγιστη δύναμη του $x - \lambda$ που διαιρεί το $\chi_A(x)$, όπου λ ιδιοτιμή του A. Το $m(\lambda)$ λέγεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της λ, ενώ η $\dim V_A(\lambda)$ λέγεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της λ.

Θεώρημα 4.2.2. Αν $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και λ ιδιοτιμή του A, τότε η γεωμετρική πολλαπλότητα του λ είναι μικρότερη ή ίση της αλγεβρικής πολλαπλότητας του λ.

Απόδειξη. Έστω $m(\lambda)$ η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ. Θα δείξουμε ότι $\dim V_A(\lambda) \leq m(\lambda)$. Έστω $v_1, \cdots, v_t$ βάση του $V_A(\lambda)$. Από το θεώρημα επέκτασης βάσης υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ της μορφής

$$\hat{v} = (v_1, \cdots, v_t, v_{t+1}, \cdots, v_n).$$

Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$L_A \colon \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{n\times 1}, \quad X \mapsto AX.$$

Τότε έχουμε ότι $B = (L_A \colon \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} \lambda I_n & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ είναι σε block τριγωνική μορφή. Από τις Ιδιότητες 3.3.1 έχουμε ότι $\chi_B(x) = \chi_{\lambda I_n}(x) \cdot \chi_*(x)$, άρα $\chi_{\lambda I_n}(x) | \chi_B(x)$, συνεπώς $\chi_{\lambda I_n} | x_A(x)$, αφού B είναι όμοιος με A. Επομένως προκύπτει ότι $(-1)^t(x-\lambda)^t | x_A(x)$, άρα ισχύει ότι $t \leq m(\lambda)$. □

4.3 Διαγωνίσιμες Γραμμικές Απεικονίσεις

Ορισμός 4.3.1. Μια γραμμική απεικόνιση $f\colon V \to V$ λέγεται **διαγωνίσιμη** αν υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του V τέτοια ώστε $(f\colon \hat{a}, \hat{a})$ να είναι διαγώνιος.

Παρατήρηση 4.3.1. (i) Η f είναι διαγωνίσιμη αν και μόνο αν υπάρχει βάση του V από ιδιοδιανύσματα της f.

(ii) Έστω $f\colon V \to V$ γραμμική απεικόνιση και $\hat{b}$ διατεταγμένη βάση του V. Τότε η f διαγωνίσιμη αν και μόνο αν $\left(f\colon \hat{b}, \hat{b}\right)$ είναι διαγωνίσιμος.

Απόδειξη. (i) Αν f διαγωνίσιμη αν και μόνο αν υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ του V με $(f : \hat{a}, \hat{a}) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, δηλαδή $f(a_i) = \lambda_i a_i$, για κάθε $i = 1, \cdots, n$. Τότε υπάρχει διατεταγμένη βάση του V από ιδιοδιανύσματα της f.

Αντίστροφα, έστω $\hat{a} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ μια διατεταγμένη βάση του V από ιδιοδιανύσμα της f. Τότε από Πρόταση 3.2.2 το σύνολο $\{[a_1]_{\hat{a}}, [a_2]_{\hat{a}}, \cdots, [a_n]_{\hat{a}}\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$. Από το Θεώρημα 4.1.1, ο A είναι διαγωνίσιμος, δηλαδή η f είναι διαγωνίσιμη.

(ii) Αν f διαγωνίσιμη αν και μόνο αν υπάρχει διατεταγμένη βάση του $\hat{a}$ του V με $(f : \hat{a}, \hat{a})$ διαγώνιο. Όμως οι πίνακες $(f : \hat{a}, \hat{a}), (f : \hat{b}, \hat{b})$ είναι όμοιοι, συνεπώς ο $(f : \hat{b}, \hat{b})$ είναι διαγωνίσιμος.

Αντίστροφα, αν $(f : \hat{b}, \hat{b})$ διαγωνίσιμος , τότε είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα Δ. Άρα υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του V ώστε $\Delta = (f : \hat{a}, \hat{a})$.

□

Παράδειγμα 4.3.1. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x, y) = (x + 3y, 4x + 2y).$$

Έστω η διατεταγμένη βάση $\hat{a} = (a_1, a_2)$ με $a_1 = (1, -1), a_2 = (3, 4)$. Τότε ισχύει ότι $f(a_1) = -2a_1$, δηλαδή a_1 είναι ιδιοδιάνυσμα της f για την ιδιοτιμή -2 και $f(a_2) = 5a_2$, άρα a_2 είναι ιδιοδιάνυσμα της f για την ιδιοτιμή 5. Επομένως έχουμε ότι $(f : \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ είναι διαγώνιος, συνεπώς η f είναι διαγωνίσιμη.

Υπενθύμιση 4.3.1. Έστω $f\colon V \to V$ γραμμική απεικόνιση, $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του V και $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$ με λ ιδιοτιμή της f. Τότε η απεικόνιση $\varphi\colon V \to \mathbb{F}^{n\times 1}$, $v \mapsto [v]_{\hat{a}}$ με $\dim V = n$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων και επίπλεον $\varphi(V_f(\lambda)) = V_A(\lambda)$.

Θεώρημα 4.3.1 (Μεγάλο Κριτήριο Διαγωνισιμότητας για γραμμικές απεικονίσεις)**.** Έστω $f\colon V \to V$ γραμμική απεικόνιση και $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές της f. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Η f είναι διαγωνίσιμη.

(ii) Υπάρχει βάση του V από ιδιοδιανύσματα της f.

(iii) $V_f(\lambda_1) + V_f(\lambda_2) + \cdots + V_f(\lambda_k) = V$.

(iv) $\dim V_f(\lambda_1) + \dim V_f(\lambda_2) + \cdots + \dim V_f(\lambda_k) = \dim V$.

(v) $\chi_f(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_k)^{n_k}$ με $\dim V_f(\lambda_i) = n_i$ για κάθε $i = 1, \cdots, k$.

Απόδειξη.

- Η ισοδυναμία των (i) και (ii) προκύπτει από την Παρατήρηση 4.3.1
- (i) $\to$ (iii) Υποθέτουμε ότι η f είναι διαγωνίσιμη και έστω $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του V. Από Παρατήρηση 4.3.1 έχουμε πως $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$ είναι διαγωνίσιμος και από το Θεώρημα 4.2.1 ισχύει ότι $\sum\limits_i V_A(\lambda_i) = \mathbb{F}^{n\times 1}$. Συνεπώς από την Υπενθύμιση 4.3.1 έχουμε ότι $\sum\limits_i V_f(\lambda_i) = V$.
- (iii) $\to$ (i) Άσκηση.
- (iii) $\to$ (iv) Έστω $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του V και $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$. Από Παρατήρηση 4.3.1 και Υπενθύμιση 4.3.1 ισχύει ότι $\sum\limits_i V_A(\lambda_i) = \mathbb{F}^{n\times 1}$.Από το Θεώρημα 4.2.1 για πίνακες έχουμε $\sum\limits_i \dim V_A(\lambda_i) = n$. Όμως ισχύει ότι $\sum\limits_i \dim V_A(\lambda_i) = \sum\limits_i \dim V_f(\lambda_i)$, συνεπώς προκύπτει ότι $\sum\limits_i \dim V_f(\lambda_i) = n$.
- (iv) $\to$ (iii) Άσκηση.
- (iv) $\to$ (v) Άσκηση.

□

4.4 Εφαρμογές Διαγωνοποίησης

Εφαρμογές της διαγωνοποίησης βρίσκονται στις δυνάμεις πινάκων,σε αναδρομικές σχέσεις ακολουθιών,στις ρίζες πινάκων, σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων και σε πολλά άλλα παραδείγματα.

Παρατήρηση 4.4.1. Αν $P^{-1}AP = \Delta = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, τότε ισχύει ότι

$$(P^{-1}AP)^m = \Delta^m \Leftrightarrow P^{-1}A^mP = diag(\lambda_1^m, \cdots, \lambda_n^m)\ ,$$

για κάθε $m \geq 1$.

Εφαρμογή 4.4.1 (Δυνάμεις Πινάκων)**.** Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Να υπολογισθεί ο πίνακας A^m, για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Κατά τους γνωστούς υπολογισμούς προκύπτει ότι

$$V_A(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{και} \quad V_A(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Άρα ο A έχει τρείς διακεκριμένες ιδιοτιμές, δηλαδή είναι διαγωνίσιμος. Θέτουμε $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος. Άρα ισχύει ότι $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(-1, 1, 2)$ επομένως

$$A^m = P \cdot \mathrm{diag}\left((-1)^m, 1, 2^m\right) \cdot P^{-1} ,$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τελικά λοιπόν προκύπτει ότι

$$A^m = \begin{pmatrix} 2^m & 1-2^m & 1-2^m \\ 0 & (-1)^m & 0 \\ 0 & 1-(-1)^m & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Ας εξετάσουμε το παράδειγμα της ακολουθίας Fibonacci :

$$F_1 = 1, F_2 = 2, \ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Η ακολουθία Fibonacci εμφανίζεται συχνά σε προβλήματα για παράδειγμα : Ποίο είναι το πλήθος των ακολουθιών $0, 1$ μήκους n ώστε να μην εμφανίζεται η συνεχόμενη δυάδα $1, 1$;

Εφαρμογή 4.4.2 (Αναδρομικές Ακολουθίες)**.** Έχουμε $F_1 = 1, F_2 = 2, \ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Παρατηρήστε ότι ισχύει το εξής :

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Με χρήση επαγωγής αποδεικνύεται ότι $\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, για κάθε $n \geq 2$, όπου $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A : $\chi_A(x) = x^2 - x - 1$, όπου έχουμε $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ οι ιδιοτιμές του A. Άρα οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι οι $V_A(\lambda_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\rangle$ και $V_A(\lambda_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Θέτοντας $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ έχουμε ότι ο P είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ότι $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$, όπου από τη Παρατήρηση 4.4.1 είναι άμεσο ότι ισχύει το εξής :

$$A^m = P \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{m+1} - \lambda_2^{m+1} \\ \lambda_1^{m+2} - \lambda_2^{m+2} \end{pmatrix}.$$

Τελικά λοιπόν έχουμε ότι ισχύει :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad \text{για κάθε } n \geq 3.$$

Εφαρμογή 4.4.3 (Ρίζες Πινάκων)**.** Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί πίνακας $B \in \mathbb{F}^{3\times 3}$, ώστε να ισχύει $B^3 = A$.

Απόδειξη. Από την Εφαρμογή 4.4.1 έχουμε πως $A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$, όπου $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε, θέτοντας $B = P\mathrm{diag}\left(-1, 1, \sqrt[3]{2}\right)P^{-1}$ προκύπτει ότι $B^3 = A$, δηλαδή το ζητούμενο. □

4.5 Ασκήσεις Κεφαλαίου 4.

Ομάδα Α΄ : 1, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 25, 32, 36
Ομάδα Β΄ : 2, 6, 7, 12, 13, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35

Άσκηση 4.1. Εξετάστε ποιοι από τους παρακάτω πίνακες είναι διαγωνίσιμοι.Αν κάποιος $A_i \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι διαγωνίσιμος, να βρεθεί μια βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ που αποτελείτε από ιδιοδιανύσματα του A_i, ένας αντιστρέψιμος $P_i \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $P_i^{-1}A_iP_i$ διαγώνιο και ο πίνακας $P_i^{-1}A_iP_i$.

a. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

b. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$,

c. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

d. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Άσκηση 4.2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ διαγωνίσιμος πίνακας.

a. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο k ο A^k είναι διαγωνίσιμος και γενικά για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ο $\phi(A)$ είναι διαγωνίσιμος.

b. Δείξτε ότι αν $A^k = 0$ για κάποιο θετικό ακέραιο k, τότε $A = 0$.

c. Δείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο $\phi(A^{-1})$ είναι διαγωνίσιμος για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$.

d. Αν $\chi_A(x) = (x-3)^{10}$ να βρεθεί ο A.

e. Έστω $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ με $A^kX = 0$ για κάποιο θετικό ακέραιο k.Δείξτε ότι $AX = 0$.

f. Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.Είναι δυνατό ο $A + A^{-1}$ να είναι όμοιος με τον $diag(1, 3, 3, \cdots, 3)$;

Άσκηση 4.3. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3}.$$

a. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A, μια βάση για κάθε ιδιόχωρου του A και η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγουν τα ιδιοδιανύσματα του A.

b. Να εξετασθεί αν ο A είναι διαγωνίσιμος και στην περίπτωση που είναι διαγωνίσιμος, να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος .

Άσκηση 4.4. Έστω $A = \begin{pmatrix} 4 & a \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a. Αποδείξτε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $a > -1/12$.

b. Έστω $a = 2$.Βρείτε αντιστρέψιμους πίνακες $P, Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ώστε $P^{-1}AP$ και $Q^{-1}AQ$ να είναι διακεκριμένοι διαγώνιοι πίνακες.

Άσκηση 4.5. a. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας διαγωνίσιμος πίνακας, του οποίου οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικές.Δείξτε ότι υπάρχει $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $B^2 = A$.

b. Δείξτε ότι ο $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ δεν είναι διαγωνίσιμος και ότι δεν υπάρχει $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τέτοιος ώστε $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 4.6. Έστω $A, P, \Delta \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιο ώστε $AP = P\Delta$ και Δ είναι διαγώνιος, $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

a. Δείξτε ότι για κάθε $k = 1, \cdots, n$ έχουμε $AP^{(k)} = \lambda_k P^{(k)}$, όπου $P^{(k)}$ είναι η k-στήλη του P.

b. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{F}$. Βρείτε έναν $A \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ με ιδιοτιμές τις $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Είναι ο A μοναδικός ;

Άσκηση 4.7. Έστω $A = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ * & 3 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ με $\det A = \mathrm{Tr} A = 0$.Δείξτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.8. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ένας άνω τριγωνικός πίνακας της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix},$$

δηλαδή ο A είναι άνω τριγωνικός και κάθε στοιχείο της διαγωνίου είναι ίσο με λ.Δείτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν είναι διαγώνιος.

Άσκηση 4.9. Εξετάστε αν ο

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.10. Να βρεθούν οι τιμές των $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε ο

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ b & c & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

να είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.11. Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγουν τα ιδιοδιανύσματα του

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

να είναι ίση με 3.

Άσκηση 4.12. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $AB = BA$.Αποδείξτε ότι αν ο A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο B είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.13. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ δύο διαγωνίσιμοι πίνακες.Δείξτε ότι οι A, B είναι όμοιοι αν και μόνο αν $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.

Άσκηση 4.14. Να βρεθούν όλα τα $a \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$ να είναι διαγωνίσιμη στις ακόλουθες περιπτώσεις :

a. $f(x, y, z) = (x + az, 2y, ay + 2z)$,

b. $f(x, y, z) = (ax + y + z, x + ay + z, x + y + az)$.

Άσκηση 4.15. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω γραμμικές απεικονίσεις είναι διαγωνίσιμες

a. $f : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3,\ f(x, y, z) = (x + y, y - z, 2y + 4z)$,

b. $g : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3,\ g(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$,

c. $h : \mathbb{F}_2[x] \to \mathbb{F}_2[x],\ h(\phi(x)) = \phi(1)x$.

Άσκηση 4.16. Έστω $f : V \to V$ μια διαγωνίσιμη γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $\lambda \in \{-1, 1\}$ για κάθε ιδιοτιμή λ της f.Δείξτε ότι $f^2 = 1_V$.

Άσκηση 4.17. Έστω $f : V \to V$ ένας ισομορφισμός. Δείξτε τα εξής.

a. Αν το $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι μια ιδιοτιμή της f, τότε $\lambda \neq 0$.

b. Το $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι μια ιδιοτιμή της $f \Leftrightarrow$ το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή της f^{-1}.

c. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{F} - \{0\},\ V_f(\lambda) = V_{f^{-1}}(\lambda^{-1})$.

d. f διαγωνίσιμη $\Leftrightarrow f^{-1}$ διαγωνίσιμη.

Άσκηση 4.18. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a} = (v_1, v_2, v_3)$ του $\mathbb{R}^3$ με

$$(f : \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Δείξτε ότι η f^2 είναι διαγωνίσιμη.

b. Αληθεύει ότι η f είναι διαγωνίσιμη ;

c. Έστω ότι $\lambda_1, \lambda_3 > 0$.Δείξτε ότι το $\sqrt{\lambda_1}v_1 + \sqrt{\lambda_3}v_3$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της f.

Άσκηση 4.19. Έστω $f : V \to V$ μια διαγωνίσιμη γραμμική απεικόνιση.Δείξτε ότι $\ker f = \ker f^m$ και $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^m$ για κάποιο θετικό ακέραιο m.

Άσκηση 4.20. Για κάθε θετικό ακέραιο k υπολογίστε τον A^k, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4.21. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Υπολογίστε τη δύναμε $A^k,\ k \geq 1$.

b. Να βρεθεί ένας πίνακας $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιος ώστε $B^3 = A$.

c. Πόσους πίνακες $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ μπορείτε να βρείτε τέτοιους ώστε $B^3 = A$;

Άσκηση 4.22. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n), $n = 1, 2, \cdots$, η οποία ορίζεται από του όρους $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ και τον αναδρομικό τύπο $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $n = 3, 4, \cdots$ Να βρεθεί ο γενικός όρος a_n συναρτήσει των a_1, a_2 και n .

Άσκηση 4.23.

a. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ διαγωνίσιμος τέτοιος ώστε $|\lambda| \geq 2$ για κάθε ιδιοτιμή του A.Δείξτε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $B + B^{-1} = A$.

b. Δείξτε ότι δεν υπάρχει αντιστρέψιμος $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιος ώστε $B + B^{-1} = I_3$.

Άσκηση 4.24. Έστω ότι $n \geq 2$.

a. Δείξτε ότι $\mathbb{R}^{n\times n} = U \oplus V$, όπου $U = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^t\}$, $V = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = -A^t\}$.Επίσης δείξτε ότι $\dim U = \dfrac{n(n+1)}{2}, \dim V = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

b. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα, αποδείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n},\ A \mapsto A^t\ ,$$

είναι διαγωνίσιμη και βρείτε το χαρακτηριστικό πολυωνυμό της.

Άσκηση 4.25. Έστω $f, g : V \to V$ δύο γραμμικές απεικονίσεις τέτοιες ώστε η f είναι διαγωνίσιμη και κάθε ιδιοδιάνυσμα της f είναι ιδιοδιάνυσμα της g.Δείξτε ότι $f \circ g = g \circ f$.

Άσκηση 4.26. Έστω $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}$$

είναι μη μηδενικός.

a. Δείξτε ότι $rankA = 1$.

b. Δείξτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $TrA \neq 0$.

Άσκηση 4.27. Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.28. Έστω $a \in \mathbb{F}$ και $\hat{\beta} = (v_1, v_2, v_3)$ μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^3$.Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$ που ορίζεται από

$$f(v_1) = v_1,\ f(v_2) = 2v_1 - av_2 - v_3,\ f(v_3) = a^2 v_2 + av_3.$$

a. Δείξτε ότι η f δεν είναι διαγωνίσιμη.

b. Δείξτε ότι η f^n είναι διαγωνίσιμη για κάθε $n \geq 2$.

Άσκηση 4.29. Έστω $n \geq 2$.Έστω $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε όχι όλα είναι ίσα με το 0 και $\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i = 0$. Να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

και δείξτε ότι αυτός δεν είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.30. Εξετάστε ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές ή λάθος.Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

a. Υπάρχει διαγωνίσιμη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{F}^4 \to \mathbb{F}^4$ τέτοια ώστε $\chi_f(x) = x^2(x-3)^2$ και $\dim \mathrm{Im} f = 3$.

b. Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ b & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι όμοιοι.

c. Έστω $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση.Αν $\lambda \neq \mu$ είναι δύο ιδιοτιμές της f, τότε η γραμμική απεικόνιση

$$g : V(\lambda) \oplus V(\mu) \to V(\lambda) \oplus V(\mu),\ g(u + v) = f(u + v)\ ,$$

είναι διαγωνίσιμη.

Άσκηση 4.31. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $\mathrm{rank} A = r$.Αποδείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι της μορφής

$$(-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n-r}x^{n-r}.$$

Άσκηση 4.32. Έστω $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ και λ, μ οι ιδιοτιμές του A.Δείξτε ότι αν $\lambda \neq \mu$, τότε για κάθε θετικό ακέραιο k ,

$$A^k = \frac{\lambda^k}{\lambda - \mu}(A - \mu I_2) + \frac{\mu^k}{\mu - \lambda}(A - \lambda I_2).$$

Άσκηση 4.33. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με rank$A = 1$ και $n \geq 2$.Αποδείξτε τις εξής προτάσεις.

a. Ο A είναι όμοιος με πίνακα της μορφής
$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

b. $TrA \neq 0 \ \Leftrightarrow$ ο A είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.34. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ που ορίζεται από $f(x^2+1) = x+1,\ f(x+1) = x+1\ f(1) = x+1$.Θέτουμε $g = f^{1821} + 2 \cdot 1_V,\ V = \mathbb{R}_2[x]$.

a. Να βρεθεί μια βάση για κάθε ιδιόχωρο της f και κάθε ιδιόχωρο της g.

b. Να εξεταστεί αν οι f, g είναι διαγωνίσιμες.

c. Να εξεταστεί αν οι f, g είναι ισομορφισμοί.

Άσκηση 4.35. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ και $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ f(X) = AX - XA$. Εξετάστε αν η f είναι διαγωνίσιμη.

Άσκηση 4.36. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ είναι οι ιδιοτιμές αντιστρέψιμου $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, τότε οι ιδιοτιμές του $adjA$ είναι οι $\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ \lambda_1\lambda_2\lambda_4,\ \lambda_1\lambda_3\lambda_4,\ \lambda_2\lambda_3\lambda_4$.

Άσκηση 4.37. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα.

a. Κάθε πίνακας που είναι όμοιος με διαγωνίσιμο πίνακα είναι διαγωνίσιμος.

b. Αν $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με $\chi_A(x) = x(x+1)(x^2+1)$, τότε ο A είναι διαγωνίσιμος.

c. Αν $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με $\chi_A(x) = x(x+1)(x^2+1)$, τότε ο A είναι διαγωνίσιμος.

d. Έστω $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με $\chi_A(x) = x^2(x-1)(x-2)$.Τότε ο A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $\dim V_A(0) > 1$.

e. Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι διαγωνίσιμοι, τότε $A + B$ είναι διαγωνίσιμος.

f. Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι διαγωνίσιμοι, τότε AB είναι διαγωνίσιμος.

g. Κάθε αντιστρέψιμος πίνακας είναι διαγωνίσιμος.

h. Η διάσταση του υπόχωρου που παράγουν τα ιδιοδιανύσματα του $A = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ * & 3 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 4 \end{pmatrix}$ είναι τουλάχιστον 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΤΡΙΓΩΝΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

5.1 Τριγωνίσιμοι πίνακες

Ορισμός 5.1.1. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ λέγεται **τριγωνίσιμος** αν υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος ώστε $P^{-1}AP = T$ άνω τριγωνικός.

Παράδειγμα 5.1.1. Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ο οποίος δεν είναι διαγωνίσιμος (δείξτε γιατί) είναι σαφές ότι είναι τριγωνίσιμος, αφού είναι άνω τριγωνικός.

Παρατήρηση 5.1.1. (i) Αν ο $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι τριγωνίσιμος, τότε το $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{F}[x]$.

(ii) Αν A είναι διαγωνίσιμος, τότε είναι και τριγωνίσιμος.

Απόδειξη. (i) Ο A είναι τριγωνίσιμος, δηλαδή υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος που ικανοποιεί την σχέση $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, άρα συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\chi_A(x) = \chi_{P^{-1}AP}(x) = (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x)$.

(ii) Το ζητούμενο είναι άμεσο από τον ορισμό. Προσοχή ! **Το αντίστροφο δεν ισχύει.**

□

Υπενθύμιση 5.1.1. Έστω πίνακες $A, B, P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $P^{-1}AP = B$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Το $P^{(i)}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ.

(ii) $B^{(i)} = \lambda E_i$, όπου $\{E_1, \cdots, E_n\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$.

Θεώρημα 5.1.1. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι τριγωνίσιμος αν και μόνο αν το $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Απόδειξη. Αν A τριγωνίσιμος, τότε το $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων από Παρατήρηση 5.1.1.

Αντίστροφα, θεωρούμε πως $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x)$. Θα κάνουμε χρήση επαγωγής στο n.

1. **Βάση.** Για $n = 1$ το ζητούμενο ισχύει άμεσα.

2. **Επαγωγικό Βήμα.** Έστω πως το ζητούμενο ισχύει για πίνακες μεγέθους $n-1\times n-1$.

   Έστω $u_1 \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1. Τότε γνωρίζουμε πως υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ της μορφής $u = \{u_1, \cdots, u_n\}$. Θέτουμε $P_1 \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $P_1^{(i)} = u_i$, για κάθε $i = 1, 2, \cdots n$. Επειδή u είναι βάση, τότε ο P_1 είναι αντιστρέψιμος. Από Υπενθύμιση 5.1.1 έχουμε πως $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ με $B_1 \in \mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$. Επίσης γνωρίζουμε ότι $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x)\cdot\chi_{B_1}(x)$, άρα $\chi_{B_1}(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Συνεπώς από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $P_2 \in \mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $P_2^{-1}B_1P_2 = T$, ο οποίος είναι άνω τριγωνικός. Θέτουμε $P = P_1 \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & P_2 \end{array}\right)$, ο οποίο είναι αντιστρέψιμος. Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής

   $$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & P_2 \end{array}\right)^{-1} P_1^{-1}AP_1 \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & P_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & P_2 \end{array}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & P_2 \end{array}\right)$$
   $$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & P_2^{-1}B_1P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

   όπου ο τελευταίο πίνακας είναι άνω τριγωνικός, αφού T είναι άνω τριγωνικός.

□

Παράδειγμα 5.1.2. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Τότε έχουμε ότι $\chi_A(x) = x^2$, δηλαδή ο A είναι τριγωνίσιμος. Με συνήθεις πράξεις υπολογίζουμε ότι $V_A(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Θεωρούμε οποιονδήποτε αντιστρέψιμο P με $P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, για παράδειγμα τον πίνακα $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε προκύπτει πως $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 5.1.3. Θεωρούμε τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο παράδειγμα, όπου $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ και την ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1.1 θέτουμε $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ο Q είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα γνωρίζουμε ότι

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 5.1.4. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Με συνήθεις πράξεις υπολογίζουμε ότι $\chi_A(x) = -(x-4)^3$ και $V_A(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Θεωρούμε βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ που περιέχει το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ για παράδειγμα $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Θέτουμε $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος με $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$, όπου $B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Συνεχίζουμε, όμοια, με τον B_1 όπου $\chi_{B_1}(x) = (x-4)^2$ και $V_{B_1}(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, θέτοντας $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, τότε ο πίνακας P_2 είναι αντιστρέψιμος και $P_2^{-1}B_1P_2 = \begin{pmatrix} 4 & * \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Τελικά, αν $P = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, τότε P αντιστρέψιμος και μάλιστα $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & * & * \\ 0 & 4 & * \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα 5.1.5. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ με $\chi_A(x) = (1-x)(3-x)^2$.

Α΄ τρόπος

Υπολογίζουμε ότι $V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ και $V_A(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Έτσι θεωρούμε τον παρακάτω πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

που προκύπτει επεκτείνοντας το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ σε βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Τότε γνωρίζουμε ότι $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & * & *\\0 & 3 & *\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

Β′ τρόπος

Παρατηρούμε ότι $A^{(2)} = 3E_2$. Άρα ο E_2 είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή το 3. Έπειτα ακολουθούμε την ιδέα της απόδειξης όπως πριν. Συνοπτικά θέτουμε $P = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Τότε έχουμε ότι $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}3 & * & *\\0 & 0 & -3\\0 & 1 & 4\end{pmatrix}$. Θέτοντας $B_1 = \begin{pmatrix}0 & -3\\1 & 4\end{pmatrix}$ ισχύει ότι $\chi_{B_1}(x) = (x-1)(x-3)$, οπότε B_1 είναι διαγωνίσιμος. Έχουμε πως $V_{B_1}(1) = \left\langle\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$ και $V_{B_1}(3) = \left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$. Για $P_2 = \begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}$ έχουμε ότι $P_2^{-1}B_1P_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$. Θέτοντας $P = P_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ προκύπτει ότι $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}3 & * & *\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

5.2 Τριγωνίσιμες γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός 5.2.1. Μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to V$ λέγεται **τριγωνίσιμη** αν υπάρχει $\hat{v}$ διατεταγμένη βάση του V, ώστε ο πίνακας $(f : \hat{v}, \hat{v})$ να είναι άνω τριγωνικός.

Παρατήρηση 5.2.1. Έστω $f : V \to V$, $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του V και $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(i) Η f είναι τριγωνίσιμη.

(ii) Ο A είναι τριγωνίσιμος.

(iii) Το $\chi_f(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Απόδειξη.
- (i) $\leftrightarrow$ (ii) Το ζητούμενο είναι άμεσο από Θεώρημα 1.2.1
- (ii) $\leftrightarrow$ (iii) Το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 5.1.1 και επειδή $\chi_f(x) = \chi_A(x)$.

□

Παράδειγμα 5.2.1. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad f(x, y, z) = (2x, x + y + 2z, ay + z)$. Να δείξετε ότι f τριγωνίσιμη αν και μόνο αν $a \geq 0$.

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι $A = (f : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, επομένως ισχύει ότι

$$\chi_f(x) = \chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 2 \\ 0 & a & 1-x \end{pmatrix}.$$

Έτσι έχουμε ότι $x_f(x) = (2-x)(x^2 - 2x + 1 - 2a)$, δηλαδή η f είναι τριγωνίσιμη αν και μόνο αν $\Delta = 4 - 4(1-2a) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$. □

Υπενθύμιση 5.2.1. Έστω T άνω τριγωνικός, δηλαδή της μορφής $T = \begin{pmatrix} t_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix}$.Με χρήση επαγωγής ισχύει πως $T^k = \begin{pmatrix} t_1^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n^k \end{pmatrix}$, για κάθε $k \geq 1$. Πιο γενικά, ισχύει πως για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε $\varphi(T) = \begin{pmatrix} \varphi(t_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(t_n) \end{pmatrix}$, δηλαδή άνω τριγωνικός.

Θεώρημα 5.2.1 (Φασματικής Απεικόνισης)**.** Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x)$. Τότε για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ισχύει ότι

$$\chi_{\varphi(A)}(x) = (\varphi(\lambda_1) - x)\cdots(\varphi(\lambda_n) - x)\,.$$

Απόδειξη. Έστω $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Αφού $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x)$, τότε ο A είναι τριγωνίσιμος, δηλαδή υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} t_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix}.$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $\varphi(T) = P^{-1}\varphi(A)P$. Από τη τελευταία σχέση και την Υπενθύμιση 5.2.1 έχουμε ότι

$$\chi_{\varphi(T)}(x) = \chi_{\varphi(A)}(x) = (\varphi(t_1) - x)\cdots(\varphi(t_n) - x)\ ,$$

όπου t_i ιδιοτιμή του A για $i = 1, 2, \cdots, n$. □

5.3 Θεώρημα Cayley-Hamilton

Κίνητρο. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Γνωρίζουμε ότι $\dim \mathbb{F}^{n\times n} = n^2$ και το πλήθος των στοιχειών $I_n, A, A^2, \cdots, A^{n^2} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι ίσο με n^2+1, συνεπώς τα παραπάνω στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άρα, υπάρχουν $a_0, a_1, \cdots, a_{n^2} \in \mathbb{F}$, όχι όλα 0, με $a_{n^2}A^{n^2} + \cdots + a_0 I_n = 0$. Έτσι αν θέσουμε $\varphi(x) = a_{n^2}x^{n^2} + \cdots + a_1 x + a_0$, τότε $\varphi(x) \neq 0$ και $\varphi(A) = 0$.

Παρατήρηση 5.3.1. Έστω $A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $A_i \in \mathbb{F}^{n_i\times n_i}$ και $n_1 + n_2 = n$. Τότε με χρήση επαγωγής έχουμε ότι $A^m = \begin{pmatrix} {A_1}^m & * \\ 0 & {A_2}^m \end{pmatrix}$, για κάθε $m \geq 1$. Άρα για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ έχουμε ότι $\varphi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(A_1) & * \\ 0 & \varphi(A_2) \end{pmatrix}$.

Θεώρημα 5.3.1 (Cayley-Hamilton για πίνακες)**.** Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $\chi_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Τότε ισχύει ότι $\chi_A(A) = 0$, δηλαδή ισχύει ότι

$$(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0 I_n = 0.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος θα χωριστεί σε δύο βήματα.

Βήμα Α΄

Αναγωγή στη περίπτωση που ο A είναι τριγωνικός. Θεωρούμε $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε A είναι όμοιος με τριγωνικό $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, δηλαδή υπάρχει $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος με $A = P^{-1}TP$. Ισχύει λοιπόν ότι

$$\chi_A(A) = \chi_T(A) = \chi_T(P^{-1}TP) = P^{-1}\chi_T(T)P.$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\chi_T(T) = 0$.

Βήμα Β΄

Το ζητούμενο θα αποδειχθεί με χρήση επαγωγής στο n.

- **Βάση.** Για $n = 1$ το ζητούμενο ισχύει άμεσα.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Υποθέτουμε πως ισχύει για κάθε τριγωνικό πίνακα διάστασης $(n-1) \times (n-1)$.

  Έστω $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$, όπου $T_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & * \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ είναι τριγωνικός. Έχουμε ότι $\chi_T(x) = (\lambda_1 - x)\chi_{T_1}(x)$, άρα $\chi_T(T) = (\lambda_1 \cdot I_n - T) \cdot \chi_{T_1}(T)$. Από Παρατήρηση 5.3.1 ισχύει το εξής :

$$\chi_T(T) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \lambda_1 I_{n-1} - T_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \chi_{T_1}(\lambda_1) & * \\ 0 & \chi_{T_1}(T_1) \end{pmatrix}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\chi_T(T) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \lambda_1 I_{n-1} - T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, που είναι το ζητούμενο.

$\square$

Παρατήρηση 5.3.2. Αν $\varphi \in \mathbb{F}[x]$, $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $\varphi(A) = 0$ και λ ιδιοτιμή του A, τότε λ ρίζα του $\varphi(x)$. Άρα για $A^k = 0$, ισχύει πως $\lambda = 0$, για κάθε λ ιδιοτιμή του A στο $\mathbb{C}$.

Πρόταση 5.3.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) $A^n = 0$,

(ii) $A^k = 0$, για κάποιο $k \geq 1$,

(iii) Κάθε ιδιοτιμή του A στο $\mathbb{C}$ είναι 0.

Απόδειξη.

- (i) → (ii) Άμεσο.
- (ii) → (iii) Το ζητούμενο έπεται άμεσα από Παρατήρηση 5.3.2
- (iii) → (i) Κάθε ιδιοτιμή του A στο $\mathbb{C}$ είναι 0 , άρα $\chi_A(x) = (-1)^n x^n$. Από το Θεώρημα 5.3.1 έχουμε ότι $\chi_A(A) = 0 \Leftrightarrow (-1)^n A^n = 0 \Leftrightarrow A^n = 0$.

$\square$

Θεώρημα 5.3.2 (Cayley-Hamilton για γραμμικές απεικονίσεις)**.** Έστω $f\colon V \to V$ και $\chi_f(x) = (-1)^n x^n + \cdots + a_0$. Τότε ισχύει ότι $\chi_f(f) = 0$, δηλαδή $(-1)^n f^n + \cdots + a_0 1_V \equiv 0$.

Απόδειξη. Έστω $\hat{v}$ διατεταγμένη βάση του V και $A = (f : \hat{v}, \hat{v})$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, $(\varphi(f)\colon \hat{v}, \hat{v}) = \varphi(A)$. Για $\varphi(x) = \chi_f(x) = \chi_A(x)$ έχουμε ότι $(\chi_f(f) : \hat{v}, \hat{v}) = \chi_A(A) = 0$, από το Θεώρημα 5.3.1 Έτσι συμπεραίνουμε πως $\chi_f(f) = 0$. $\square$

5.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 5.

Ομάδα Α′ : 1,2,3,4,5,6,7,11,14,23,28,34
Ομάδα Β′ : 8,9,12,13,15,16,17,18,19,20,21,22,24,25,31,33,35
Ομάδα Γ′ : 10,26,27,29,30

Άσκηση 5.1. Αποδείξτε ότι αν ο $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή, τότε ο A είναι τριγωνίσιμος.

Άσκηση 5.2.

a. Έστω $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.Αφού δείξετε ότι ο A είναι τριγωνίσιμος, βρείτε αντιστρέψιμο $U \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ με $U^{-1}AU$ τριγωνικό.

b. Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.Αφού δείξετε ότι ο A είναι τριγωνίσιμος, βρείτε αντιστρέψιμο $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $U^{-1}AU$ τριγωνικό.

c. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.Αφού δείξετε ότι ο A είναι τριγωνίσιμος, βρείτε αντιστρέψιμο $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $U^{-1}AU$ τριγωνικό.

Άσκηση 5.3. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 4 & a \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

είναι τριγωνικός αλλά όχι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 5.4. Έστω

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις διαστάσεις των ιδιόχωρων του A.

b. Αληθεύει ότι ο A είναι διαγωνίσιμος ;

c. Αληθεύει ότι ο A είναι τριγωνίσιμος ; Αν ναι, να βρεθεί αντιστρέψιμος U με $U^{-1}AU$ τριγωνικό.

Άσκηση 5.5. Έστω $\{v_1, v_2, v_3\}$ μια βάση του $\mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = v_1 + v_2 + 2v_3$, $f(v_3) = av_2 + v_3$. Δείξτε ότι η f είναι τριγωνίσιμη αν και μόνο αν $a \geq 0$.

Άσκηση 5.6. Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι το πλήθος πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τέτοιοι ώστε $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$.

Άσκηση 5.7. Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $\chi_A(x) = -x^3 + x$.Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο k

a. ο A^k είναι διαγωνίσιμος, και

b. $A^{2k} = A^2$ και $A^{2k+1} = A$.

Άσκηση 5.8. a. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.Τότε για κάθε $k \geq 1$, ισχύει $\mathrm{Tr}(A^k) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$.

b. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας τριγωνίσιμος πίνακας τέτοιος ώστε $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$.Δείξτε ότι $A^n = 0$.

c. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^{n-1}) = 0$.Δείξτε ότι αν $\mathrm{Tr}(A^n) \neq 0$, τότε ο A είναι

- διαγωνίσιμος και
- αντιστρέψιμος .

Άσκηση 5.9. Έστω $\mathbb{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$.Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

a. Κάθε ιδιοτιμή του A στο $\mathbb{C}$ ισούται με το 0.

b. $A^k = 0$ για κάποιο θετικό ακέραιο k.

c. $A^n = 0$.

d. $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^n) = 0$.

Άσκηση 5.10. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιο ώστε $AB - BA = A$.Αποδείξτε ότι $A^n = 0$.

Άσκηση 5.11. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος.Δείξτε ότι αν $\chi_A = (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x),\ \lambda_i \in \mathbb{C}$, τότε

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \left(\frac{1}{\lambda_1} - x\right)\cdots\left(\frac{1}{\lambda_n} - x\right).$$

Άσκηση 5.12. Έστω $\dim V = n$ και $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση.

a. Δείξτε ότι η f είναι τριγωνίσιμη αν και μόνο αν για κάθε $i = 1, \cdots, n$ υπάρχει υπόχωρος $W_i \leq V$ με $\dim W_i = i,\ W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_n$ και $f(W_i) \subseteq W_i$.

b. Αληθεύει ότι η f είναι τριγωνίσιμη αν για κάθε $i = 1, \cdots, n$ υπάρχει υπόχωρος $W_i \leq V$ με $\dim W_i = i$ και $f(W_i) \subseteq W_i$;

Άσκηση 5.13. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

a. Δείξτε ότι αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ βαθμού $n-1$ τέτοιο ώστε $Af(A) = 0$.

b. Δείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ βαθμού $n-1$ τέτοιο ώστε $A^{-1} = f(A)$.

Άσκηση 5.14. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a. Να παρασταθεί ο A^{-1} ως γραμμικός συνδυασμός των I_3, A, A^2.

b. Αποδείξτε ότι $A^{2n} - 2A^{2n-1} = A^2 - 2A$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

c. Να βρεθεί πολυώνυμο $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$ βαθμού το πολύ 2 τέτοιο ώστε $A^5 - 2A^4 + 2a + 3I_3 = \phi(A)$.

Άσκηση 5.15. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $\chi_A(x) = (-1)^n(x^n - x^m - x^{n-m} + 1)$, όπου $0 < m < n$.Δείξτε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος ν τέτοιος ώστε A^n να είναι τριγωνίσιμος.

Άσκηση 5.16. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μη διαγωνίσιμος πίνακας.Τότε ο A είναι όμοιος με πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Άσκηση 5.17. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $AB = BA = 0$.Δείξτε ότι $\chi_A(A+B) = \chi_A(B) - \det(A) \cdot I_n$.

Άσκηση 5.18. Αν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times n}$, θέτουμε $h(A) = \sum_{i,j} a_{ij}a_{ji}$.

a. Δείξτε ότι αν οι A, B είναι όμοιοι, τότε $h(A) = h(B)$.

b. Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.Δείξτε ότι $h(A) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2$, όπου $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ είναι οι ιδιοτιμές του A.

Άσκηση 5.19. Δείξτε ότι κάθε άνω τριγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι όμοιος με κάτω τριγωνικό πίνακα.Στη συνέχεια δείξτε ότι κάθε πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι όμοιος με κάτω τριγωνικό πίνακα.

Άσκηση 5.20. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A^n = I_n$.Δείξτε ότι $-n \leq \mathrm{Tr}A \leq n$.

Άσκηση 5.21. Έστω V ένας $\mathbb{C}-$ διανυσματικός χώρος και $f, g : V \to V$ δύο γραμμικές απεικονίσεις τέτοιες ώστε $f \circ g = g \circ f$.Δείξτε τα εξής.

a. Αν λ είναι ιδιοτιμή της f, τότε $g(V_f(\lambda)) \subseteq V_f(\lambda)$.

b. Οι f, g έχουν κοινό ιδιοδιάνυσμα.

c. Υπάρχει διατεταγμένη βάση του V τέτοια ώστε οι αντίστοιχοι πίνακες των f, g είναι άνω τριγωνικοί.

d. Για κάθε ιδιοτιμή λ της $f - g$ υπάρχει ιδιοτιμή λ_f της f και ιδιοτιμή λ_g της g τέτοιες ώστε $\lambda = \lambda_f - \lambda_g$.

Άσκηση 5.22. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$L_A : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n},\ L_A(X) = AX$$

$$R_B : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n},\ R_B(X) = XB$$

a. Δείξτε ότι $L_A \circ R_B = R_B \circ L_A$.

b. Δείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση L_A έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον πίνακα A και ότι η γραμμική απεικόνιση R_B έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον πίνακα B.

c. Έστω ότι οι A, B δεν έχουν κοινή ιδιοτιμή.Δείξτε ότι για κάθε $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ υπάρχει μοναδικός $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $AD - DB = C$.

Άσκηση 5.23. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και W_A ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{n\times n}$ που παράγεται από τα $I_n, A, A^2, \cdots$.Δείξτε ότι για κάθε $k \geq 0,\ A^{n+k} \in \langle I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1}\rangle$ και άρα $\dim W_A \leq n$.

Άσκηση 5.24. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές.Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

a. Έστω $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με $\chi_A(x) = (x^2+1)(x+1)^2$.Τότε ο πίνακας A^n είναι τριγωνίσιμος αν και μόνο αν ο n είναι άρτιος.

b. Για κάθε $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ υπάρχει πολυώνυμο $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ θετικού βαθμού τέτοιο ώστε $\varphi(A) = I_n$.

Άσκηση 5.25. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $\mathrm{rank}A = 1$.Αποδείξτε τις εξής προτάσεις.

a. $A^2 = \mathrm{Tr}(A) \cdot A$.

b. $A^n = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(A) = 0$.

c. Ο A είναι τριγωνίσιμος.

d. $\mathrm{Tr}(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ ο A είναι διαγωνίσιμος. (βλ. άσκηση 3.26).

Άσκηση 5.26. Έστω $A, B, C, D \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιο ώστε $A^iC = B^iD$ για κάθε $i \geq 1$.Αποδείξτε ότι αν οι A, B είναι αντιστρέψιμοι, τότε $C = D$.

Άσκηση 5.27. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $f_A : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από $f_A(B) = AB - BA$.Δείξτε ότι αν κάθε ιδιοτιμή του A είναι ίση με το 0, τότε κάθε ιδιοτιμή της f_A είναι ίση με το 0.

Άσκηση 5.28. Έστω V ένας $\mathbb{R}-$ διανυσματικό χώρος διάστασης 3, $\hat{a} = \{v_1, v_2, v_3\}$ μια διατεταγμένη βάση του V και $c \in \mathbb{R}$.Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : V \to V$ που ορίζεται από τις σχέσεις $f(v_1) = 2v_2,\ f(v_2) = -v_1 + 3v_2,\ f(v_3) = cv_1 + v_2 + v_3$.

a. Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές του c για τις οποίες η f είναι τριγωνίσιμη.

b. Βρείτε όλες τις τιμές του c για τις οποίες η f είναι διαγωνίσιμη.

c. Για $c = 0$ βρείτε μια βάση κάθε ιδιόχωρου της f και μια βάση του V που παράγεται από ιδιοδιανύσματα της f.

Άσκηση 5.29. Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι τριγωνίσιμος και $\mathrm{Tr}(A^2) = Tr(A^3) = \mathrm{Tr}(A^4) = c$, τότε $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ και $\mathrm{Tr}(A^k) = c$ για κάθε θετικό ακέραιο k.

Άσκηση 5.30. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ που δεν έχουν κοινή ιδιοτιμή.Δείξτε ότι δεν υπάρχει μη μηδενικό $X \in \mathbb{F}^{n\times m}$ με $AX = XB$.

Άσκηση 5.31. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.Δείξτε ότι για κάθε $m \geq 3$ δεν υπάρχει $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ με $B^m = A$.

Άσκηση 5.32. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $(AB)^n = 0,\ n \geq 1$.Τότε $(BA)^n = 0$.

Άσκηση 5.33. Αν ο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ έχει το πολύ μια μη μηδενική ιδιοτιμή, τότε $\det(I_n + A) = 1 + Tr(A)$.

Άσκηση 5.34. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.Δείξτε ότι ο πίνακας $\chi_B(A)$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν οι A, B δεν έχουν κοινή ιδιοτιμή.

Άσκηση 5.35. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα.

a. Έστω A ένας αντιστρέψιμος πίνακας.Τότε ο A είναι τριγωνίσιμος αν και μόνο αν A^{-1} είναι τριγωνίσιμος.

b. Αν ο $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι τριγωνίσιμος, τότε ο $\varphi(A)$ είναι τριγωνίσιμος για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$.

c. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.Αν ο A^2 είναι τριγωνίσιμος, τότε ο A είναι τριγωνίσιμος.

d. Αν $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $U^{-1}AU$ άνω τριγωνικός.

e. Αν $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

f. Αν $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & -5 & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$$

τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -5 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

g. Έστω $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)$.Τότε ο A είναι τριγωνίσιμος και όχι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $\dim V(1) = 1$.

h. Έστω $f : V \to V$ μια τριγωνίσιμη γραμμική απεικόνιση και $U \leq V$ ένα υπόχωρος τέτοιος ώστε $f(U) \subseteq U$.Τότε ο περιορισμός της f στο U είναι τριγωνίσιμη απεικόνιση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

6.1 Ελάχιστο Πολυώνυμο

Κίνητρο. Αν $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τότε υπάρχει $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\varphi(x) \neq 0$ τέτοιο ώστε $\varphi(A) = 0$. Για παράδειγμα, αν $\varphi(x) = \chi_A(x)$, τότε $\chi_A(A) = 0$ από το Θεώρημα Cayley-Hamilton. Θέλουμε μονικό πολυώνυμο $\varphi(x)$ ελάχιστου βαθμού με $\varphi(A) = 0$.

Ορισμός 6.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Το **ελάχιστο πολυώνυμο** του A, όπου συμβολίζεται με $m_A(x)$ είναι ένα στοιχείο στο $\mathbb{F}[x]$ ώστε :

(i) $m_A(x)$ είναι μονικό ,

(ii) $m_A(A) = 0$,

(iii) το $m_A(x)$ είναι πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού ως προς τις ιδιότητες (i) και (ii).

Παρατήρηση 6.1.1. Για κάθε $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ υπάρχει πολυώνυμο που ικανοποιεί τις ιδιότητες του Ορισμού 6.1.1 και μάλιστα είναι μοναδικό.

Απόδειξη.

- **Ύπαρξη.** Θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{\varphi(x) \in \mathbb{F}[x] \mid \varphi(x) \neq 0 \quad \text{και} \quad \varphi(A) = 0\}\,.$$

Το S είναι μη κενό, αφού από Θεώρημα 5.3.1 γνωρίζουμε, ότι $\chi_A(A) = 0$. Έτσι μπορούμε να επιλέξουμε $\varphi(x) \in S$, ελάχιστου βαθμού. Αν $r \in \mathbb{F}$ ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του, τότε $r^{-1}\varphi(x) \in S$. Συνεπώς υπάρχει πολυώνυμο στο S μονικό και ελαχίστου βαθμού που ικανοποιεί τις ιδιότητες του Ορισμού 6.1.1

- **Μοναδικότητα.** Έστω $m_A(x), m'_A(x)$ δύο ελάχιστα πολυώνυμα του A με $m_A(x) - m'_A(x) \neq 0$. Επειδή $m_A(x), m'_A(x)$ έχουν τον ίδιο βαθμό και είναι μονικά, τότε $\deg(m_A(x) - m'_A(x)) < k$, όπου $k = \deg(m_A(x)) = \deg(m'_A(x))$. Τότε αν r ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $m_A(x) - m'_A(x)$ το πολυώνυμο $r^{-1}(m_A(x) - m'_A(x))$ είναι μονικό και μηδενίζεται από τον A με $\deg(m_A(x) - m'_A(x)) < k$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του $m_A(x)$. Άρα, προκύπτει $m_A(x) = m'_A(x)$.

$\square$

Ιδιότητες 6.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(i) Αν $\varphi(A) = 0$ με $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε $m_A(x)|\varphi(x)$. Ειδικότερα, ισχύει $m_A(x)|x_A(x)$.

(ii) Κάθε ιδιοτιμή του A είναι ρίζα του $m_A(x)$. Κάθε ρίζα του $m_A(x)$ είναι ιδιοτιμή του A, δηλαδή $m_A(x)$ και $\chi_A(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες, χωρίς να λαμβάνεται υπόψιν η πολλαπλότητα. [1]

Απόδειξη. (i) Με χρήση Ευκλείδειας διαίρεσης μεταξύ των $m_A(x), \varphi_A(x)$, υπάρχουν πολυώνυμα $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$, ώστε $\varphi(x) = q(x)m_A(x) + r(x)$ με $\deg r(x) < \deg m_A(x)$ ή $r(x) = 0$. Τότε $\varphi(A) = q(A)m_A(A) + r(A) \Leftrightarrow r(A) = 0$. Αν $\deg r(x) < \deg m_A(x)$, τότε $c^{-1}r(x)$ είναι μονικό (c ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $r(x)$) μηδενίζεται από τον A και έχει βαθμό μικρότερο από το $m_A(x)$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του $m_A(x)$. Έτσι προκύπτει ότι $r(x) = 0$, δηλαδή $m_A(x)|\varphi(x)$.

Από Θεώρημα 5.3.1, έχουμε πως $\chi_A(A) = 0$, άρα $m_A(x)|\chi_A(x)$.

(ii) Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$ και $X \neq 0$ τέτοια ώστε $AX = \lambda X$. Γνωρίζουμε ότι $\varphi(A)X = \varphi(\lambda)X$, για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Ειδικότερα, έχουμε $m_A(A)X = m_A(\lambda)X \Leftrightarrow m_A(\lambda)X = 0$. Το $X \neq 0$, άρα προκύπτει ότι $m_A(\lambda) = 0$. Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται άμεσα απο το (i).

$\square$

Παράδειγμα 6.1.1. Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι $\chi_A(x) = (x-1)(x-2) = \chi_B(x)$. Τώρα $m_A(x) = (x-1)(x-2)$, διότι $m_A(x)|(x-1)(x-2)$ και το $m_A(x)$ έχει ίδιες ρίζες με το $(x-1)(x-2)$. Όμοια έχουμε ότι $m_B(x) = (x-1)(x-2)$.

Παράδειγμα 6.1.2. Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι $\chi_A(x) = -(x-2)^3$, επομένως ισχύει ότι $m_A(x) = (x-2)^3$ ή $(x-2)^2$ ή $x-2$, επειδή $m_A(x)|\chi_A(x)$. Τότε $m_A(x) \neq x-2$, αφου $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Όμως $(A-2I_3)^2 = 0$, άρα $m_A(x) = (x-2)^2$.

[1] Για παράδειγμα, θα μπορούσε $\chi_A(x) = -(x-1)^2(x-2)$ και $m_A(x) = (x-1)(x-2)$. Δεν θα μπορούσε $m_A(x) = (x-1)^2$ ή $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)$.

Όμοια για το πίνακα B παρατηρούμε πως $\chi_B = -(x-2)^3$ με $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ και $(B-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $m_B(x) = (x-2)^3$.

Ιδιαίτερη προσοχή στο συγκεκριμένο παράδειγμα !

Παράδειγμα 6.1.3. Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Βρείτε $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $\deg \varphi(x) \leq 1$, ώστε $A^{-1} = \varphi(A)$.

(b) Βρείτε $\psi(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $\deg \psi(x) \leq 1$, ώστε $A^4 + A - 2I_3 = \psi(A)$.

Απόδειξη. Αρχικά θα βρούμε το $m_A(x)$. Έχουμε ότι $\chi_A(x) = -(x-2)^2(x-3)$, άρα $m_A(x) = (x-2)^2(x-3)$ ή $(x-2)(x-3)$.Υπολογίζοντας έχουμε ότι $(A-2I_3)(A-3I_3) = 0$, δηλαδή $m_A(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$.

(a) Αφού το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A σημπεραίνουμε πως ο A είναι αντιστρέψιμος. Από την ισότητα $m_A(A) = 0$, έχουμε $A^2 - 5A + 6I_3 = 0 \Leftrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{6}(A - 5I_3)$, έτσι μια ζητούμενη επιλογή είναι η $\varphi(x) = -\frac{1}{6} \cdot (x-5)$.

(b) Εφαρμόζοντας Ευκλείδεια διαίρεση στα πολυώνυμα $m_A(x), x^4 + x - 2$, έχουμε

$$x^4 + x - 2 = (x^2 + 5x + 19) \cdot m_A(x) + 66x - 166.$$

Άρα $A^4 + A - 2 = 66A - 166I_3$, δηλαδή μια ζητούμενη επιλογή είναι $\psi(x) = 66x - 166$.

□

Πρόταση 6.1.1. Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Απόδειξη. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $B = P^{-1}AP$, όπου $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, αντιστρέψιμος. Τότε γνωρίζουμε ότι για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ισχύει $\varphi(B) = P^{-1}\varphi(A)P$. Άρα $\varphi(A) = 0$ αν και μόνο αν $\varphi(B) = 0$. Άρα είναι άμεσο $m_A(x) = m_B(x)$, από τον ορισμό τους. □

Πρόταση 6.1.2. Αν $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, όπου $B \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1}, C \in \mathbb{F}^{n_2\times n_2}$ με $n = n_1 + n_2$, τότε $m_A(x) = \text{ε.κ.π.}(m_B(x), m_C(x))$.

Απόδειξη. Αφού $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ γνωρίζουμε ότι, για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, ισχύει ότι

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(B) & 0 \\ 0 & \varphi(C) \end{pmatrix}.$$

Τώρα αν επιλέξουμε για $\varphi(x)$ το $m_A(x)$ έχουμε ότι $\begin{pmatrix} m_A(B) & 0 \\ 0 & m_A(C) \end{pmatrix} = 0$, δηλαδή $m_A(B) = m_A(C) = 0$. Έτσι έχουμε ότι $m_B(x) | m_A(x)$ και $m_C(x) | m_A(x)$, άρα ε.κ.π.$(m_B(x), m_C(x)) | m_A(x)$. Θεωρούμε $\psi(x) =$ ε.κ.π.$(m_B(x), m_C(x))$ οπότε έχουμε $\psi(A) = \begin{pmatrix} \psi(B) & 0 \\ 0 & \psi(C) \end{pmatrix} = 0$. Από την Ιδιότητα 6.1.1 (i), $m_A(x) | \psi(x)$ και επειδή τα $m_A(x), \psi(x)$ είναι μονικά, ισχύει ότι $m_A(x) = \psi(x)$. □

Παρατήρηση 6.1.2. Αν $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $A_i \in \mathbb{F}^{n_i \times n_i}$ και $n_1 + \cdots + n_k = n$, τότε ισχύει ότι

$$m_A(x) = \text{ε.κ.π.}(m_{A_1}(x), \cdots, m_{A_k}(x)).$$

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεσο με χρήση της Πρότασης 6.1.2 και επαγωγής στο k. □

Πόρισμα 6.1.1. Έστω $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_k, \cdots \lambda_k)$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$, για κάθε $i, j \in \{1, \cdots, k\}$ και $i \neq j$. Τότε ισχύει ότι $m_A(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$.

Απόδειξη. Το πόρισμα είναι άμεσο εφαρμόζοντας την Παρατήρηση 6.1.2 για $A_i = \lambda_i I_{n_i}$. □

Παρατήρηση 6.1.3. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ διαγωνίσιμος, δηλαδή όμοιος με διαγώνιο πίνακα. Από Πρόταση 6.1.1 και Πόρισμα 6.1.1 το $m_A(x)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Παράδειγμα 6.1.4. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{O}} \\ 2 & 3 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & 2 & 0 \\ & & 3 & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

όπου γράφεται ισοδύναμα $A = \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & C \end{array}\right)$ με $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ και $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Με συνήθεις πράξεις υπολογίζουμε ότι $m_B(x) = (x-2)(x-5)$ και $m_C(x) = x(x-2)$. Από την Πρόταση 6.1.2 ισχύει ότι $m_A(x) =$ ε.κ.π.$(m_B(x), m_C(x)) = x(x-2)(x-5)$.

Παράδειγμα 6.1.5. Έστω πίνακας $A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline O & C \end{array}\right)$. Τότε γενικά δεν αληθεύει (γιατί;) ότι $m_A(x) =$ ε.κ.π.$(m_B(x), m_C(x))$. Αυτό που ισχύει γενικά είναι ότι ε.κ.π.$(m_B(x), m_C(x)) | m_A(x)$.

6.2 Κριτήριο Διαγωνισιμότητας

Κίνητρο. Έστω A διαγωνίσιμος πίνακας. Τότε γνωρίζουμε ότι ο A είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_k, \cdots, \lambda_k)$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$, για κάθε $i \neq j$. Τότε από την Πρόταση 6.1.1 και Πόρισμα 6.1.1 το $m_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k)$, δηλαδή γινόμενο μονικών διακεκριμένων παραγόντων στο $\mathbb{F}[x]$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 6.2.1 (Κριτήριο διαγωνισιμότητας με $m_A(x)$)**.** Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Τότε A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν το $m_A(x)$ είναι γινόμενο μονικών διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{F}[x]$.

Απόδειξη. Αν ο A είναι διαγωνίσιμος το ζητούμενο έπεται άμεσα από το Πόρισμα 6.1.1

Αντιστρόφως, έστω πως $m_A(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$, για κάθε $i \neq j$. Γνωρίζουμε ότι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A είναι λ_i, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, k$. Θα δείξουμε ότι

$$\mathbb{F}^{n\times 1} = V_A(\lambda_1) + V_A(\lambda_2) + \cdots + V_A(\lambda_k).$$

Ορίζουμε τα εξής πολυώνυμα : [2]

$$a_i(x) = \prod_{j\neq i}(x - \lambda_j).$$

Τότε έχουμε ότι μ.κ.δ. $(a_1(x), a_2(x), \cdots, a_k(x)) = 1$. Άρα, υπάρχουν $b_i(x) \in \mathbb{F}[x]$, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, k$ ώστε

$$1 = \sum_{i=1}^{k} a_i(x)b_i(x).$$

Συνεπώς ισχύει ότι $I_n = \sum_{i=1}^{k} a_i(A)b_i(A)$, δηλαδή για $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ ισχύει ότι $X = \sum_{i=1}^{k} a_i(A)b_i(A)X$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $i = 1, 2, \cdots, k$ ισχύει ότι $a_i(A)b_i(A)X \in V_A(\lambda_i)$.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι $(A - \lambda_i I_n)a_i(A)b_i(A)X = m_A(A)b_i(A)X = 0$, καθώς $(x - \lambda_i)a_i(x) = m_A(x)$. Μέσω του ισχυρισμού αποδείξαμε ότι $F^{n\times 1} \subseteq \sum_{i=1}^{k} V_A(\lambda_i)$, επομένως συμπεραίνουμε ότι $F^{n\times 1} = \sum_{i=1}^{k} V_A(\lambda_i)$, άρα από Θεώρημα 4.2.1 ο A είναι διαγωνίσιμος. □

6.3 Ελάχιστο πολυώνυμο γραμμικής απεικόνισης

Ορισμός 6.3.1. Έστω $f\colon V \to V$ γραμμική απεικόνιση και $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του V. Θέτουμε $m_f(x) = m_A(x)$, όπου $A = (f\colon \hat{a}, \hat{a})$. Το $m_f(x)$ λέγεται το **ελάχιστο πολυώνυμο** της f.

[2] Για παράδειγμα για $k = 3$ έχουμε $a_1(x) = (x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$, $a_2(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_3)$ και $a_3(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$.

Παρατήρηση 6.3.1. Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο, ο ορισμός του $m_f(x)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της $\hat{a}$.

Ιδιότητες 6.3.1 (ελαχίστου πολυωνύμου γραμμικής απεικόνισης)**.** Έστω $f\colon V \to V$ γραμμική απεικόνιση. Ισχύουν οι εξής ιδιότητες :

(i) Το $m_f(x)$ είναι μονικό, ισχύει ότι $m_f(f) = 0$ και ως προς τις ιδιότητες αυτές είναι ελαχίστου βαθμού.

(ii) Αν $\varphi(f) = 0$ με $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε $m_f(x)|\varphi(x)$. Ειδικότερα, $m_f(x)|\chi_f(x)$.

(iii) Κάθε ιδιοτιμή της f είναι ρίζα του $m_f(x)$. Τα $m_f(x), \chi_f(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες.

(iv) Η f είναι διαγωνίσιμη αν και μόνο αν $m_f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_k)$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$, για κάθε $i \neq j$.

Απόδειξη. Οι ιδιότητες είναι άμεσες από τα αντίστοιχα αποτελέσματα για πίνακες. Ενδεικτικά θα αποδειχθεί η ιδιότητα (i). Αν $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$, τότε γνωρίζουμε, ότι για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ισχύει $\varphi(A) = (\varphi(f) : \hat{a}, \hat{a})$ από Πρόταση 2.4.1 Άρα $(m_f(f) : \hat{a}, \hat{a}) = m_f(A) = m_A(A) = 0$, δηλαδή $m_f(f) = 0$.Αφού $m_A(x)$ είναι μονικό και ελαχίστου βαθμού, τότε $m_f(x)$ είναι μονικό και ελαχίστου βαθμού εξ' ορισμού. □

6.4 Ταυτόχρονη Διαγωνοποίηση

Ερώτημα 6.4.1. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ διαγωνίσιμοι. Τότε υπάρχουν $P_A, P_B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμοι με $P_A^{-1}AP_A$ και $P_B^{-1}BP_B$ διαγώνιοι πίνακες. Πότε υπάρχει κοινός P αντιστρέψιμος ώστε $P^{-1}AP$ και $P^{-1}BP$ διαγώνιοι πίνακες ;

Παρατήρηση 6.4.1. Έστω ότι υπάρχει τέτοιος P, δηλαδή P αντιστρέψιμος με $P^{-1}AP = \Delta_A$ διαγώνιος και $P^{-1}BP = \Delta_B$ διαγώνιος. Τότε $A = P\Delta_A P^{-1}$ και $B = P\Delta_B P^{-1}$ και παρατηρούμε ότι

$$AB = P\Delta_A\Delta_B P^{-1} \quad \text{και} \quad BA = P\Delta_B\Delta_A P^{-1}.$$

Επειδή Δ_A, Δ_B είναι διαγώνιοι, τότε $\Delta_A\Delta_B = \Delta_B\Delta_A$, δηλαδή $AB = BA$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο. Θα μελετήσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα στις γραμμικές απεικονίσεις.

6.4.1 Αναλλοίωτοι Υπόχωροι

Ορισμός 6.4.1. Έστω $f\colon V \to V$ γραμμική απεικόνιση. Ένας υπόχωρος $U \leq V$ λέγεται **f-αναλλοίωτος** αν $f(U) \subseteq U$, δηλαδή για κάθε $u \in U$ ισχύει ότι $f(u) \in U$.

Παράδειγμα 6.4.1. Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση.

(i) Το $\{0\}$ και V είναι f- αναλλοίωτοι υπόχωροι.

(ii) Το $\ker f$ και $\mathrm{Im} f$ είναι f- αναλλοίωτοι υπόχωροι. Πράγματι, αν $u \in \ker f$, τότε $f(u) = 0 \in \ker f$. Επίσης έστω $v \in \mathrm{Im} f$, τότε υπάρχει $u \in V$, ώστε $f(u) = v$. Τότε έχουμε ότι $f(v) = f(f(u)) \in \mathrm{Im} f$.

(iii) Κάθε ιδιόχωρος $V_f(\lambda)$ είναι $f-$ αναλλοίωτος. Πράγματι, αν $u \in V_f(\lambda)$, τότε $f(u) = \lambda u \in V_f(\lambda)$.

(iv) Αν $U_1, U_2 \leq V$ με U_1, U_2 να είναι f- αναλλοίωτοι, τότε $U_1 + U_2$ είναι f- αναλλοίωτος.

(v) Το άθροισμα f- αναλλοίωτων ιδιόχωρων είναι $f-$ αναλλοίωτος.

(vi) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x, y) = (x, x + y)$. Εδώ $f(e_2) = e_2$ και $f(e_1) = e_1 + e_2$, όπου e_1, e_2 η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$. Άρα $\langle e_2 \rangle$ είναι $f-$ αναλλοίωτος ενώ $\langle e_1 \rangle$ δεν είναι $f-$ αναλλοίωτος (δείξτε γιατί).

(vii) Αν $U \leq V$ με $\dim U = 1$. Ο U είναι f- αναλλοίωτος αν και μόνο αν $U = \langle u \rangle$, όπου u κάποιο ιδιοδιάνυσμα της f (δείξτε γιατί).

Παρατήρηση 6.4.2. Έστω U $f-$ αναλλοίωτος. Τότε $f(U) \subseteq U$, δηλαδή ο περιορισμός της f στο U, συμβολίζεται με f_U, είναι η γραμμική απεικόνιση $f_U : U \to U,\ f_U(u) = f(u)$, για κάθε $u \in U$.

Πρόταση 6.4.1. Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση και U είναι $f-$ αναλλοίωτος υπόχωρος του V. Αν f διαγωνίσιμη, τότε $f_U : U \to U$ διαγωνίσιμη.

Απόδειξη. Από Ιδιότητα 6.3.1 (iv) ισχύει ότι $m_f(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k),\ \lambda_i \neq \lambda_j$, για κάθε $i \neq j$. Τώρα ισχυριζόμαστε ότι $m_{f_U}(x) | m_f(x)$. Αν συμβαίνει αυτό έχουμε ότι f_U διαγωνίσιμη από την ίδια ιδιότητα. Πράγματι, για κάθε $u \in U$ ισχύει ότι $m_f(f_U)(u) = m_f(f)(u) = 0$. Άρα προκύπτει ότι $m_{f_U}(x) | m_f(x)$. □

6.4.2 Ταυτόχρονη Διαγωνοποίηση

Θεώρημα 6.4.1. Έστω $f, g : V \to F$ γραμμικές απεικονίσεις. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Υπάρχει βάση του V κάθε στοιχείο της οποίας είναι ιδιοδιάνυσμα και της f και της g.

(ii) Οι f, g είναι διαγωνίσιμες και $f \circ g = g \circ f$.

Απόδειξη.

- (i) → (ii) Έστω ότι υπάρχει βάση $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ του V με $f(v_i) = \lambda_i v_i$ και $g(v_i) = \mu_i v_i$, για κάθε $i = 1, 2, \cdots n$ και $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{F}$. Ισχυριζόμαστε ότι $f \circ g - g \circ f = 0$. Πράγματι παρατηρούμε ότι :

$$(f \circ g - g \circ f)(v_i) = f(g(v_i)) - g(f(v_i)) = f(\mu_i v_i) - g(\lambda_i v_i) = \mu_i f(v_i) - \lambda_i g(v_i) = 0.$$

Τέλος είναι άμεσο ότι f, g είναι διαγωνίσιμες λόγω του Θεωρήματος 4.3.1 (ii).

- (ii) $\to$ (i) Η f είναι διαγωνίσιμη, άρα ισχύει ότι $V = V_f(\lambda_1) + \cdots + V_f(\lambda_k)$, όπου λ_j οι διακεκριμένες ιδιοτιμές της f για $j = 1, 2, \cdots, k$.

  Ισχυριζόμαστε ότι αν $f \circ g = g \circ f$, τότε $V_f(\lambda_i)$ είναι g αναλλοίωτος υπόχωρος για κάθε i. Πράγματι έστω $v \in V_f(\lambda_i)$, δηλαδή $f(v) = \lambda_i v$. Τότε

  $$g(f(v)) = g(\lambda_i v) = \lambda_i g(v) \Leftrightarrow g \circ f(v) = \lambda_i g(v).$$

  Άρα $f \circ g(v) = \lambda_i g(v)$, δηλαδή $g(v) \in V_f(\lambda_i)$. Έστω g_i ο περιορισμός της g στο $V_f(\lambda_i)$. Επειδή g είναι διαγωνίσιμη και $V_f(\lambda_i)$ είναι g- αναλλόιωτος υπόχωρος από Πρόταση 6.4.1, έχουμε g_i διαγωνίσιμη. Επομένως, υπάρχει βάση B_i του $V_f(\lambda_i)$ όπου κάθε στοιχείο της οποίας είναι ιδιοδιανύσματα της g. Συνεπώς, κάθε στοιχείο του B_i είναι ιδιοδιάνυσμα της f και g. Θέτοντας $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ παίρνουμε τη ζητούμενη βάση του V [3], κάθε στοιχείο της οποίας είναι ιδιοδιάνυσμα της f και της g.

$\square$

Ας δούμε λοιπόν γιατί ισχύει το αντίστοιχο στους πίνακες. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$L_A, L_B \colon \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{n\times 1}, \quad L_A(X) = AX,\ L_B(X) = BX.$$

Αν ισχύει το Θεώρημα 6.4.1 (i), τότε υπάρχει βάση B του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ κάθε στοιχείο της οποίας είναι ιδιοδιάνυσμα της L_A και της L_B. Ισοδύναμα L_A, L_B είναι διαγωνίσιμες με $L_A \circ L_B = L_B \circ L_A$. Ισοδύναμα A, B διαγώνισιμοι και $AB = BA$, αφού μια γραμμική απεικόνιση είναι διαγωνίσιμη αν ο πίνακας της ως προς κάποια βάση είναι διαγωνίσιμος και

$$\begin{aligned} BA &= \left(L_B : \hat{E}, \hat{E}\right) \cdot \left(L_A : \hat{E}, \hat{E}\right) = \left(L_B \circ L_A : \hat{E}, \hat{E}\right) \\ &= \left(L_A \circ L_B : \hat{E}, \hat{E}\right) = \left(L_A : \hat{E}, \hat{E}\right) \cdot \left(L_B : \hat{E}, \hat{E}\right) = AB \end{aligned}$$

[3] Η εξήγηση είναι ότι $\dim \sum_{i=1}^{k} V_f(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} \dim V_f(\lambda_i)$, άρα $\dim V = \sum_i |B_i|$.

6.5 Ασκήσεις Κεφαλαίου 6.

Ομάδα Α΄ : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 30, 32, 36
Ομάδα Β΄ : 6, 8, 9, 11, 13, 14, 20, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 34, 35, 37
Ομάδα Γ΄ : 25, 27, 38, 39, 40

Άσκηση 6.1. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a. Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

b. Εξετάστε αν ο A είναι διαγωνίσιμος.

c. Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και βρείτε $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$ βαθμού το πολύ 1 με $A^{-1} = \varphi(A)$.

d. Βρείτε $\psi(x) \in \mathbb{R}[x]$ βαθμού το πολύ 1 με $A^4 = \psi(A)$.

Άσκηση 6.2. Υπολογίστε τα χαρακτηριστικά και τα ελάχιστα πολυώνυμα των

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3}$$

και εξετάστε αν οι A, B είναι όμοιοι.

Άσκηση 6.3. Έστω $\hat{v} = (v_1, v_2, v_3)$ μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$ και

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(xv_1 + yv_2 + zv_3) = (3x + y)v_1 + (2y + z)v_2 + (-x - y + z)v_3\ .$$

Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο της f και εξετάστε αν υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{u}$ του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $(f : \hat{u}, \hat{u}) = A$, όπου A είναι ο πίνακας της προηγούμενης άσκησης.

Άσκηση 6.4. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x],\ f(\varphi(x)) = \varphi'(x) - 2\varphi(x)$.

a. Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο της f και εξετάστε αν η f είναι διαγωνίσιμη.

b. Βρείτε τη διάσταση κάθε ιδιόχωρου της f.

Άσκηση 6.5. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $(A + 3_n)(A - 4I_n)(A + 7I_n) = 0$.Εξετάστε αν ο A είναι

a. διαγωνίσιμος ,

b. αντιστρέψιμος .

Άσκηση 6.6. Να καθοριστούν όλοι οι $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιο ώστε $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ και $\mathrm{Tr}(A) = 6$.

Άσκηση 6.7. Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ελάχιστο πολυώνυμο του

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

Εξετάστε αν ο A είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 6.8. Έστω $n > 1$.Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο της γραμμικής απεικόνισης

$$f : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n},\ f(A) = A^t$$

και εξετάστε αν είναι διαγωνίσιμη.

Άσκηση 6.9. Αν $f : V \to V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f^3 = f$, τότε κάθε στοιχείο $v \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $v = v_{-1} + v_0 + v_1$, όπου $v_\lambda \in \ker(f - \lambda I_n),\ \lambda = -1, 0, 1$.

Άσκηση 6.10. Δείξτε ότι $m_A(x) = m_{A^t}(x)$ για κάθε $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

Άσκηση 6.11. Έστω $\mathbb{F}^{n\times n}$ και W_A ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{n\times n}$ που παράγεται από τα στοιχεία A^n με $n \geq 0$. Δείξτε ότι $\dim W_A = \deg m_A(x)$.

Άσκηση 6.12. Έστω $A, B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2n\times 2n}$.

a. Δείξτε ότι αν ο D είναι διαγωνίσιμος, τότε οι A και C είναι διαγωνίσιμοι.

b. Ισχύει το αντίστροφο του a ;

Άσκηση 6.13. Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

Άσκηση 6.14. Δείξτε τα εξής.

a. Αν $\deg m_A(x) = \deg \chi_A(x)$, τότε $m_A(x) = (-1)^n \chi_A(x)$.

b. Έχουμε ότι $m_A(x) = x^n - 1$ και $m_B(x) = (x-1)^n$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

Άσκηση 6.15. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & f & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Αποδείξτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $a = f = 0$.

Άσκηση 6.16. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

a. Βρείτε τις τιμές του k ώστε $\deg m_A(x) \leq 2$.

b. Για την τιμή του k που βρήκατε πρίν, υπολογίστε τον A^{-1} με χρήση του $m_A(x)$.

c. Δείξτε ότι ο A^m δεν είναι διαγωνίσιμος για κάθε θετικό ακέραιο m.

Άσκηση 6.17. Να βρεθούν οι τιμές του $c \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε το πολυώνυμο $(x-3)^{1821}(x^{1821}-5x+c)$ να μηδενίζεται από τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 6.18. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμική απεικόνιση με $m_f(x) = x(x-1)^2$.Βρείτε όλα τα $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $f^{1821} + af^2 + bf + c \cdot 1_{\mathbb{R}^n} = 0$.

Άσκηση 6.19. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Για καθεμιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις βρείτε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ (αν υπάρχουν) τέτοιες ώστε να αληθεύει η αναγραφόμενη ιδιότητα.

a. Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $P^{-1}AP$ άνω τριγωνικό.

b. Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $P^{-1}AP$ διαγώνιο.

c. Ο πίνακας A μηδενίζει το πολυώνυμο $(x-1)(x-2)\cdots(x-2010)$.

Άσκηση 6.20. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A^m = I_n$ για κάποιο θετικό ακέραιο m και $\mathrm{Tr}(A) = n$.Αποδείξτε ότι $A = I_n$.

Άσκηση 6.21. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $A \neq I_2, B \neq -I_2,\ A^3 - A^2 + A - I_2,\ B^3 + B^2 + B + I_2 = 0$.

a. Να δειχθεί ότι οι A, B έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

b. Αληθεύει ότι έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο ;

c. Εξετάστε αν οι A, B είναι τριγωνίσιμοι.

Άσκηση 6.22. Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $A^2 - 9A + 20I_3 = 0$.Δείξτε ότι ισχύει ακριβώς μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις

$$A = 4I_3 \text{ ή } A = 5I_3 \text{ ή } A \text{ όμοιος με τον } \mathrm{diag}(4,4,5) \text{ ή } A \text{ όμοιος με τον } \mathrm{diag}(4,5,5).$$

Άσκηση 6.23. Έστω $A_i \in \mathbb{R}^{3\times 3}, i = 1,\cdots,5$, με $A_i^2 - 9A_i + 20I_3 = 0$. Δείξτε ότι δύο από τους A_i είναι όμοιοι.

Άσκηση 6.24. Έστω $f, g : V \to V$ δύο γραμμικές απεικονίσεις τέτοιες ώστε

$$\text{μ.κ.δ.}(m_f(x), m_g(x)) = 1.$$

a. Δείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση $m_g(f) : V \to V$ είναι ισομορφισμός.

b. Δείξτε ότι αν $\ker f \neq \{0_V\}$, τότε $\ker g = \{0_V\}$.

Άσκηση 6.25. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

Στην άσκηση 3.17, είδαμε ότι $\chi_A(x) = (-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)$.Δείξτε ότι $m_A(x) = (-1)^n \chi_A(x)$.

Άσκηση 6.26. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$.Δείξτε ότι ο $\varphi(A)$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν μ.κ.δ.$(\varphi(x), m_A(x)) = 1$.

Άσκηση 6.27. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας αντιστρέψιμος,τριγωνίσιμος πίνακας τέτοιος ώστε $m_A(x) = m_{A^2}(x)$. Δείξτε ότι $(A - I_n)^n = 0$.

Άσκηση 6.28. a. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ τέτοιοι ώστε $m_A(x) = m_B(x)$.Δείξτε ότι οι A, B είναι όμοιοι.

b. Έστω

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Δείξτε ότι $\chi_C(x) = \chi_D(x)$ και $m_C(x) = m_D(x)$, αλλά οι πίνακες C, D δεν είναι όμοιοι.

Άσκηση 6.29. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $R_A : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n},\ R_A(B) = BA$. Δείξτε τα εξής.

a. Αν $\sigma(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε $\sigma(R_A)(B) = B\sigma(A)$ για κάθε $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, και

b. Αληθεύει ότι $\chi_{R_A}(x) = \chi_A(x)$;

Άσκηση 6.30. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.Ξέρουμε ότι $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$ (βλ. άσκηση 3.27).Αληθεύει ότι $m_{AB}(x) = m_{BA}(x)$;

Άσκηση 6.31. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές.Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα.

a. Υπάρχει $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με $\chi_A(x) = (x-1)(x+1)^3$ και $m_A(x) = (x-1)^2(x+1)$.

b. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A^5 + 5A + I_n = 0$.Τότε ο A είναι διαγωνίσιμος.

c. Υπάρχει $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $m_A(x) = (x-1)(x-3)$ και A όμοιο με πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & 2 & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$;

Άσκηση 6.32. Αν $f : V \to V$ είναι διαγωνίσιμη γραμμική απεικόνιση και U είναι f- αναλλοίωτος υπόχωρος του V, τότε ο περιορισμός της f στο U είναι διαγωνίσιμη.

Άσκηση 6.33. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $\det A = 0$.Δείξτε ότι υπάρχει μη μηδενικός $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $AB = BA = 0$.

Άσκηση 6.34. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A^3 = A$ και $B^3 = B$.Δείξτε τα εξής.

a. Ο A είναι διαγωνίσιμος και $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$.

b. Οι $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι όμοιοι αν και μόνο αν $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ και $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Άσκηση 6.35. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $A^2 - 3A = B^2 - 3B = 0$.Δείξτε τα εξής :

a. Αν $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$, τότε οι A, B είναι όμοιοι.

b. Αν $AB = BA$, τότε ο $\varphi(A + B)$ είναι διαγωνίσιμος για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Άσκηση 6.36. Έστω $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με $\chi_A(x) = x^2(x-1)(x-2)$.Δείξτε ότι αν $AX = AY = 0$, όπου $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, τότε $A^3 = 3A^2 - 2A$.

Άσκηση 6.37. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ με $m_A(x) = (x-1)(x-2)$ και $\chi_B(x) = (x-3)^4(x-4)^2$.Δείξτε ότι αν $V_A(1) \subseteq V_B(3)$ και $V_A(2) \subseteq V_B(4)$, τότε $AB = BA$.

Άσκηση 6.38. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $AB = BA,\ A^{1821} = B^{1821} = I_n$.Τότε $A+B+I_n$ είναι διαγωνίσιμος και αντιστρέψιμος.

Άσκηση 6.39. Δείξτε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν υπάρχουν $a_i \in \mathbb{F}$ και $P_i \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $A = a_1P_1 + \cdots + a_kP_k,\ P_i^2 = P_i, P_iP_j = P_jP_i$ για κάθε i, j.

Άσκηση 6.40. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.Δείξτε ότι $m_{AB}(x) = m_{BA}(x)$ ή $m_{AB}(x) = xm_{BA}(x)$ ή $m_{BA}(x) = xm_{AB}(x)$.

Άσκηση 6.41 (Επαναληπτική άσκηση κατανόησης)**.** Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

a. $A^m = 0$ για κάποιο θετικό ακέραιο $m \Leftrightarrow A^n = 0$.

b. A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow m_A(0) \neq 0$.

c. Αν $A^2 = 4A$, τότε ο A είναι διαγωνίσιμος.

d. Αν $B \in \mathbb{F}^{2n\times 2n},\ B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.Τότε $m_B(x) = m_A(x)$.

e. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $m_{AB}(x) = m_{BA}(x)$ για κάθε $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΤΟ ΣΥΝΗΘΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΣΤΟ $\mathbb{R}^N$ ΚΑΙ $\mathbb{C}^N$

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε την έννοια του ″μήκους″ και της ″καθετότητας″ διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$ καθώς και να ορίσουμε είδη πινάκων που σχετίζονται με αυτά.

7.1 Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

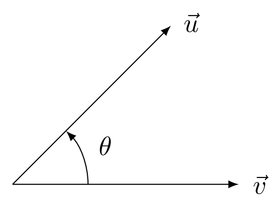
Ορισμός 7.1.1. Η απεικόνιση

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \langle u, v\rangle = u_1 v_1 + \cdots u_n v_n \quad ,$$

όπου $u = (u_1, \cdots u_n)$ και $v = (v_1, \cdots , v_n)$ λέγεται το **σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του** $\mathbb{R}^n$.

- Αν $u = (u_1, u_2, \cdots , u_n) \in \mathbb{R}^n$, το **μήκος** του u είναι $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots u_n^2} = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.
- Τα u, v λέγονται **κάθετα** αν $\langle u, v\rangle = 0$.

Παρατήρηση 7.1.1. Για $n = 2$, αποδεικνύεται ότι $\cos\vartheta = \dfrac{\langle u, v\rangle}{|u| \cdot |v|}$, όπου ϑ η γωνία των διανυσμάτων u, v. Εδώ έχουμε ότι $\cos\vartheta = 0$ αν και μόνο αν $\langle u, v\rangle = 0$.



Παράδειγμα 7.1.1. Έστω $u, v \in \mathbb{R}^3$ με $u = (1, 1, 2), v = (-1, -1, 1)$. Τότε ισχύει ότι

$$\langle u, v\rangle = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0 \ ,$$

δηλαδή τα u, v είναι κάθετα.

Ιδιότητες 7.1.1. Για οποιαδήποτε διανύσματα $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ και $a \in \mathbb{R}$ ισχύουν τα παρακάτω.

(i) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$,

(ii) $\langle u, v + w\rangle = \langle u + v\rangle + \langle u + w\rangle$

(iii) $\langle au, v\rangle = a\langle u, v\rangle$,

(iv) $\langle u, av\rangle = a\langle u, v\rangle$,

(v) $\langle u, v\rangle = \langle v.u\rangle$,

(vi) $\langle u, u\rangle \geq 0 \quad$ και $\quad \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Απόδειξη. Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Παράδειγμα 7.1.2. Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$ τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους. Να δείξετε τα εξής :

(i) $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$,

(ii) αν υποθέσουμε ότι $|u| = |v|$, τότε $u + v, u - v$ είναι κάθετα.

Απόδειξη. (i) Παρατηρήστε ότι ισχύει το εξής :

$$|u + v|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = |u|^2 + |v|^2 \ ,$$

που προκύπτει αφού γνωρίζουμε ότι u, v είναι κάθετα μεταξύ τους. Ισοδύναμα λοιπόν έχουμε ότι

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle = 0.$$

(ii) Παρατηρήστε ότι ισχύει το εξής :

$$\langle u + v, u - v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, u\rangle - \langle uv, v\rangle - \langle v, v\rangle = |u|^2 - |v|^2 = 0 \ ,$$

δηλαδή το ζητούμενο.

□

Υπενθύμιση 7.1.1. Το σύνολο των **μιγαδικών αριθμών** είναι

$$\mathbb{C} = \left\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\right\}.$$

- Κάθε $z \in \mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $z = a + bi$ με $a, b \in \mathbb{R}$.
- Ο **συζυγής** του $z = a + bi$ είναι ο αριθμός $\overline{z} = a - bi$.
- Το **μέτρο** του $z = a + bi$ είναι $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Έχουμε ότι ισχύει $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Ορισμός 7.1.2. Το **σύνηθες εσωτερικό γινόμενο** στο $\mathbb{C}^n$ είναι η απεικόνιση :

$$\langle , \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad \langle u, v \rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots u_n\overline{v_n} \ ,$$

όπου $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ και $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$.

- Το **μήκος** του u είναι $|u| = \sqrt{|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.
- Τα u, v λέγονται **κάθετα** αν $\langle u, v \rangle = 0$.

Παράδειγμα 7.1.3. Αν $u = (1, i)$ και $v = (-1, i)$, τότε $\langle u, u \rangle = 1 \cdot \overline{1} + i \cdot \overline{i} = 2$ και $\langle u, v \rangle = 1 \cdot (-1) + i \cdot \overline{i} = -1 - i^2 = 0$. Άρα τα διανύσματα u, v είναι κάθετα.

Ιδιότητες 7.1.2. Για οποιαδήποτε διανύσματα $u, v, w \in \mathbb{C}^n$ και $a \in \mathbb{C}$ ισχύουν τα παρακάτω.

(i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,

(ii) $\langle u, v + w \rangle = \langle u + v \rangle + \langle u + w \rangle$,

(iii) $\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle$,

(iv) $\langle u, av \rangle = \overline{a}\langle u, v \rangle$,

(v) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$,

(vi) $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \text{και} \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Απόδειξη. Ενδεικτικά θα αποδείξουμε την ιδιότητα (iv).

Έστω $u = (u_1, \cdots, u_n)$ και $v = (v_1, \cdots, v_n)$ διανύσματα στο $\mathbb{C}^n$. Τότε έχουμε ότι $av = (av_1, \cdots, av_n)$ και υπολογίζουμε διαδοχικά ότι

$$\langle u, av \rangle = u_1\overline{av_1} + \cdots u_n\overline{av_n} = u_1 \cdot \overline{a} \cdot \overline{v_1} + \cdots u_n \cdot \overline{a} \cdot \overline{v_n} = \overline{a}(u_1\overline{v_1} + \cdots + u_n\overline{v_n}) = \overline{a}\langle u, v \rangle.$$

□

7.2 Ορθοκανονικές Βάσεις

7.2.1 Ορθοκανονικές βάσεις και μέθοδος Gram-Schmidt

Ορισμός 7.2.1. Έστω $V \subseteq \mathbb{F}^n$. Μια βάση $\{v_1, \cdots, v_m\}$ του V λέγεται **ορθοκανονική** βάση αν ισχύουν τα εξής :

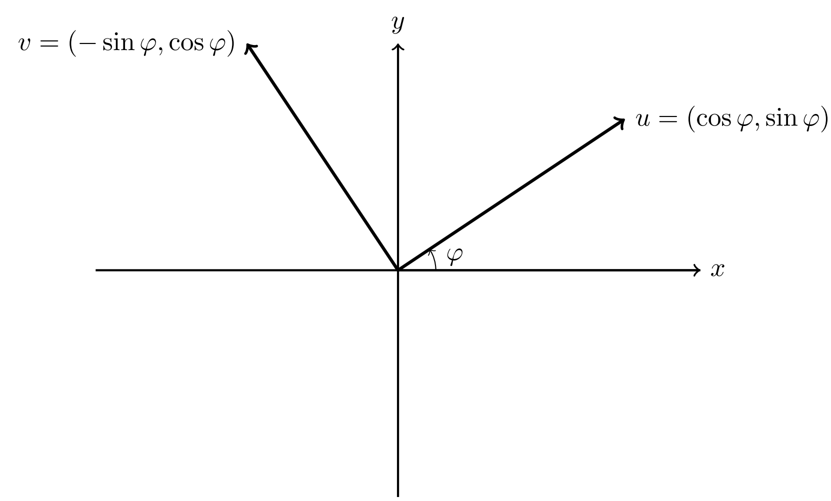
(i) $|v_i| = 1$, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$ και

(ii) $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, για κάθε $i \neq j$.

Παράδειγμα 7.2.1. Για $V = \mathbb{R}^2$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$, $\hat{e} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ είναι ορθοκανονική. Ομοίως η βάση $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ (δείξτε γιατί). Τα παραδείγματα αυτά μπορούν να γενικευτούν ώς εξής :

Για κάθε γωνία φ τα διανύσματα $u = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ και $v = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

Πράγματι, έχουμε ότι $|u| = \sqrt{cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1, |v| = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = 1$ και $\langle u, v \rangle = 0$.



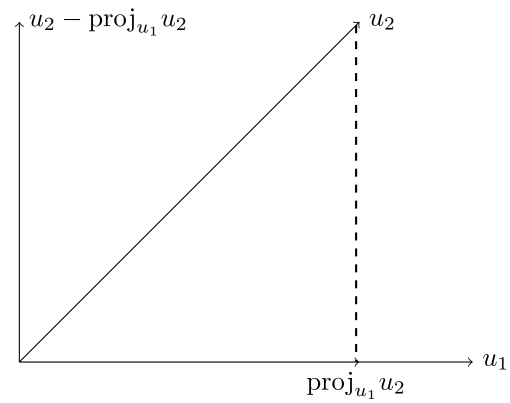
Γεωμετρική αναπαράσταση των διανυσμάτων u, v .

Παρατήρηση 7.2.1. Έστω $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ ορθοκανονική βάση του V και $v \in V$. Τότε υπάρχουν μοναδικά $a_i \in \mathbb{F}, i = 1, \cdots m$ με $v = a_1v_1 + \cdots a_mv_m$. Ισχύει ότι $a_i = \langle v, v_i \rangle$. Πράγματι, έχουμε ότι

$$\langle v, v_i \rangle = \sum_{j=1}^{m} a_i \langle v_j, v_i \rangle = a_i.$$

Πρόταση 7.2.1. Κάθε μη μηδενικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ έχει ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη. Έστω $V \leq \mathbb{R}^2$. Από θεώρημα ύπαρξης βάσης γνωρίζουμε ότι υπάρχει βάση $\{u_1, u_2\}$ του V. Ορίζοντας $v_1 = u_1$ και $v_2 = u_2 - \text{proj}_{u_1} u_2$, όπου $\text{proj}_{u_1} u_2$ η προβολή του u_2 στο u_1. Τότε προκύπτει ότι v_1, v_2 είναι κάθετα και μάλιστα $\left\{ \frac{v_1}{|v_1|}, \frac{v_2}{|v_2|} \right\}$ είναι ορθοκανονική βάση του V. □



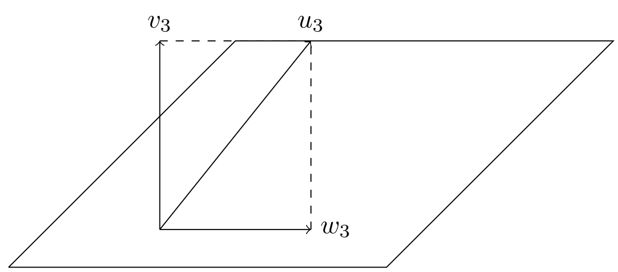
Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την μέθοδο Gram-Schmidt και θα δούμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται και σε κάθε υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$.

Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt

Θα περιγράψουμε αρχικά τη μέθοδο για $n = 3$. Έστω $V \leq \mathbb{F}^3$ και $\{u_1, u_2, u_3\}$ βάση του V. Ορίζουμε τα εξής στοιχεία στο V :

- $v_1 = u_1$,
- $v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{|v_1|^2} \cdot v_1$, όπου $\frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{|v_1|^2} \cdot v_1 = \text{proj}_{v_1} u_2$ και
- $v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{|v_2|^2} - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{|v_1|^2}$, όπου $\frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{|v_2|^2} = \text{proj}_{v_2} u_3$ και $\frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{|v_1|^2} = \text{proj}_{v_1} u_3$.

Τότε έχουμε ότι $\left\{ \frac{v_1}{|v_1|}, \frac{v_2}{|v_2|}, \frac{v_3}{|v_3|} \right\}$ είναι **ορθοκανονική** βάση του V (δείξτε γιατί).



Εικόνα για $n = 3$.

Γενική Περίπτωση. Έστω $\{u_1, \cdots u_m\}$ βάση του V και ορίζουμε αναδρομικά $v_1, \cdots v_m$ ως εξής

$$v_1 = u_1 \quad \text{και} \quad v_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, v_j \rangle}{|v_j|^2} \cdot v_j, \quad \text{για κάθε } i \geq 2.$$

Τότε έχουμε ότι $\left\{ \frac{v_1}{|v_1|}, \cdots, \frac{v_m}{|v_m|} \right\}$ είναι **ορθοκανονική** βάση του V.

Θεώρημα 7.2.1. Κάθε μη μηδενικός υπόχωρος του $\mathbb{F}^n$ έχει ορθοκανονική βάση .

Απόδειξη. Έστω $V \leq \mathbb{F}^n$. Από το θεώρημα ύπαρξης βάσης υπάρχει βάση $\{u_1, \cdots u_m\}$ του V. Τώρα εφαρμόζουμε σε αυτή Gram-Schmidt και προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Παράδειγμα 7.2.2. Να βρεθεί ορθοκανονική βάση του $V = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\big\}$.

Απόδειξη. Πρώτα βρίσκουμε μια βάση του V κατά τα γνωστά :

$$V = \{(x, y, -x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle.$$

Επειδή $(1, 0, -1), (0, 1, -1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε ότι $\{u_1, u_2\}$ βάση του V, όπου $u_1 = (1, 0, -1)$ και $u_2 = (0, 1, -1)$. Εφαρμόζουμε Gram Schmidt στη παραπάνω βάση.

$$v_1 = u_1 = (1, 0, -1) \quad \textbf{και} \quad v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{|v_1|^2} \cdot v_1 = (-1/2, 1, -1/2).$$

Τελικά $\left\{ \frac{v_1}{|v_1|}, \frac{v_2}{|v_2|} \right\}$ είναι ορθοκανονική βάση του V, όπου $\frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 0, -1)$ και $\frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-1, 2, -1)$. □

Παράδειγμα 7.2.3. Να βρεθεί ορθοκανονική βάση του $V = \langle a, b, c\rangle$, όπου $a = (1, 1, 1, 1), b = (1, 1, 1, -1)$ και $c = (3, 3, 3, -1)$.

Απόδειξη. Για την εύρεση βάσης του V θα εφαρμόσουμε γραμμοπράξεις στον πίνακα των a, b, c :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε πως $\{u_1, u_2\}$ βάση του V, όπου $u_1 = (1, 1, 1, 0)$ και $u_2 = (0, 0, 0, 1)$.Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε ήδη ότι $\langle u_1, u_2\rangle = 0$, άρα δεν χρείαζεται εφαρμόγη του Gram Schmidt.Τότε $v_1 = u_1$ και $v_2 = u_2$ και έχουμε πως $\frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1, 1, 1, 0)$ και $\frac{v_2}{|v_2|} = (0, 0, 0, 1)$ είναι ορθοκανονική βάση του V. □

7.2.2 Ορθογώνιο συμπλήρωμα υπόχωρου του $\mathbb{F}^n$

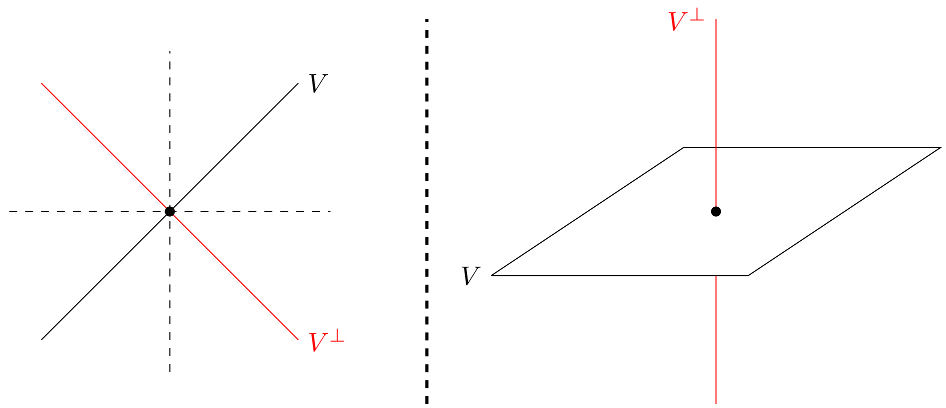
Ορισμός 7.2.2. Έστω $V \leq \mathbb{F}^n$. Το **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του V είναι το σύνολο

$$V^\perp = \{u \in \mathbb{F}^n \mid \langle u, v\rangle = 0, \quad \text{για κάθε } v \in V\}.$$

Πρόταση 7.2.2. Το $V^\perp$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{F}^n$.

Απόδειξη. Αρχικά $V^\perp \neq \emptyset$, αφού $O_{\mathbb{F}^n} \in V^\perp$. Έστω $u_1, u_2 \in V^\perp$, δηλαδή ισχύει ότι $\langle u_1, v\rangle = \langle u_2, v\rangle = 0$, για κάθε $v \in V$. Τότε $\langle u_1 - u_2, v\rangle = 0$, για κάθε $v \in V$, δηλαδή $u_1 - u_2 \in V^\perp$. Επίσης αν $u \in V^\perp$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle = 0$, για κάθε $v \in V$, δηλαδή $\lambda u \in V^\perp$. □

Παράδειγμα 7.2.4.



Πρόταση 7.2.3. Έστω $V \leq \mathbb{F}^n$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(i) $\mathbb{F}^n = V \oplus V^\perp$,

(ii) $\dim V^\perp = n - \dim V$,

(iii) αν $V \leq U$, τότε $U^\perp \leq V^\perp$,

(iv) $(V^\perp)^\perp = V$.

Απόδειξη. (i) Θα δείξουμε ότι $\mathbb{F}^n = V + V^\perp$ και $V \cap V^\perp = \{0\}$. Από το Θεώρημα 7.2.1, υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{v_1, \cdots, v_m\}$ του V. (Αν $V = \{0\}$, το ζητούμενο είναι άμεσο).

Έστω $w \in \mathbb{F}^n$. Θεωρούμε $w = v + (w - v)$, όπου $v = \sum_{i=1}^{m} \langle w, v_i \rangle \cdot v_i \in V$. Τότε $w - v \in V^\perp$, αφού

$$\langle w - v, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle - \langle v, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle - \sum \langle w, v_t \rangle \langle v_t, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle - \langle w, v_i \rangle = 0.$$

Άρα $w - v \in V^\perp$. Τέλος αν $v \in V \cap V^\perp$, τότε $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$, άρα $V \cap V^\perp = \{0\}$.

(ii) Έπεται άμεσα από το (i), αφού $n = \dim V \oplus V^\perp = \dim V + \dim V^\perp$.

(iii) Έπεται άμεσα από το (i), αφού αν $w \in \mathbb{F}^n$ με $\langle w, u \rangle = 0$, για κάθε $u \in U$, τότε $\langle w, v \rangle = 0$, για κάθε $v \in V$.

(iv) Αφού για κάθε $v \in V$ έχουμε $\langle v, u \rangle = 0$, για κάθε $u \in V^\perp$ έχουμε ότι $V \subseteq \left(V^\perp\right)^\perp$. Επίσης $\dim \left(V^\perp\right)^\perp = n - (n - \dim V) = \dim V$, άρα προκύπτει ότι $\left(V^\perp\right)^\perp = V$.

□

Τρόπος εύρεσης του $V^\perp$

Πρόταση 7.2.4 (Επέκταση ορθοκανονικής βάσης)**.** Έστω $V \leq \mathbb{F}^n$. Από το Θεώρημα 7.2.1 υπάρχει ορθοκανονική βάση του V, $\{v_1, \cdots, v_m\}$. Τότε, υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{F}^n$ της μορφής $\{v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_n\}$.

Απόδειξη. Έστω $\{v_1, \cdots, v_m\}$ μια ορθοκανονική βάση του V. Από το θεώρημα επέκτασης βάσης προκύπτει $\{v_1, \cdots, v_m, u_1, \cdots, u_k\}$ μία βάση του $\mathbb{F}^n$. Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στη παραπάνω βάση, άρα προκύπτει $\{v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{F}^n$. □

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς παρατηρούμε ότι $\{v_1, \cdots, v_m\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του V και $\{v_{m+1}, \cdots, v_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $V^\perp$, από την Πρόταση 7.2.4.

Με βάση τα παραπάνω συνοπτικά ένας τρόπος εύρεσης μια ορθοκανονικής βάση του $V^\perp$ είναι ο εξής

(i) Θεωρούμε $B = \{u_1, \cdots, u_m\}$ μια βάση του V.

(ii) Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στη βάση B, όπου προκύπτει η $B' = \{v_1, \cdots, v_m\}$ μια ορθοκανονική βάση του V.

(iii) Επεκτείνουμε την B' στην $B'' = \{v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_k\}$ μια βάση του $\mathbb{F}^n$.

(iv) Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στη βάση B'', όπου προκύπτει $\{v_1, \cdots, v_n, v_{m+1}, \cdots, v_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{F}^n$ και μάλιστα $W = \{v_{m+1}, \cdots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $V^\perp$.

7.3 Ερμιτιανοί και μοναδιαίοι πίνακες

7.3.1 Ο πίνακας A^*, σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και γινόμενο πινάκων

Ορισμός 7.3.1. Έστω πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ο πίνακας $\overline{A} = \overline{(a_{ij})}$ ονομάζεται ο **συζυγής** πίνακας του A και ο $A^* = \left(\overline{A}\right)^t$ ο **αναστροφοσυζυγής** πίνακας του A.

Παράδειγμα 7.3.1. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2-i & 4 \\ 5+2i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Τότε από τον παραπάνω ορισμό έχουμε ότι

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2+i & 4 \\ 5-2i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2+i & 5-2i \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θα θεωρούμε συχνά το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο να ορίζεται σε στήλες $\langle , \rangle : \mathbb{C}^{n\times 1} \times \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}^{n\times 1}$. Δηλαδή αν $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, τότε $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι $\langle X, Y\rangle = X^t \cdot \overline{Y}$.

Λήμμα 7.3.1. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.

(i) Για κάθε $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ισχύει $\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^*Y\rangle$.

(ii) Αν $\langle AX, Y\rangle = 0$ για κάθε $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, τότε $A = 0$.

Απόδειξη. (i) Έχουμε ότι $\langle AX, Y\rangle = (AX)^t\overline{Y}$. Όμοια έχουμε ότι

$$\langle X, A^*Y\rangle = X^t\overline{A^*Y} = X^tA^t\overline{Y} = (AX)^t\overline{Y}.$$

(ii) Έστω $X = E_i$ και $Y = E_j$ για $1 \le i, j \le n$. Παρατηρήστε τότε ότι $\langle AX, Y\rangle = a_{ji}$, για κάθε $1 \le i, j \le n$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $A = 0$.

□

7.3.2 Ερμιτιανοί Πίνακες

Ορισμός 7.3.2. Ένα πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται **Ερμιτιανός** αν $A^* = A$.

Παρατήρηση 7.3.1. (i) Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι Ερμιτιανός αν και μόνο αν είναι συμμετρικός.

(ii) Ένας πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι Ερμιτιανός αν και μόνο αν $\overline{a_{ii}} = a_{ii}$ και $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$.

Παράδειγμα 7.3.2. (i) Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 4-5i \\ 4+5i & 6 \end{pmatrix}$ είναι Ερμιτιανός, αφού

$$A^* = (\overline{A})^t = \begin{pmatrix} 2 & 4-5i \\ 4+5i & 6 \end{pmatrix} = A.$$

(ii) Ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 2 & 4-3i \\ 4+5i & 6 \end{pmatrix}$ δεν είναι Ερμιτιανός, αφού $B^* = \begin{pmatrix} 2 & 4-5i \\ 4+3i & 6 \end{pmatrix} \neq B.$

Ιδιότητες 7.3.1. Έστω Ερμιτιανός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ισχυούν τα εξής :

(i) Κάθε ιδιοτιμή του A είναι πραγματικός αριθμός.

(ii) Τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους.

Απόδειξη. (i) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A και X ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, δηλαδή $AX = \lambda X$ με $X \neq 0$. Έχουμε ότι ισχύει $\langle AX, X\rangle = \langle \lambda X, X\rangle = \lambda\langle X, X\rangle$. Τώρα από το Λήμμα 7.3.1 ισχύει $\langle AX, X\rangle = \langle X, A^*X\rangle$, συνεπώς ισχύει ότι

$$\langle X, A^*X\rangle = \langle X, AX\rangle = \langle X, \lambda X\rangle = \overline{\lambda}\langle X, X\rangle.$$

Άρα έχουμε ότι $(\lambda - \overline{\lambda})\langle X, X\rangle = 0$ και αφού $X \neq 0$, τότε $\langle X, X\rangle \neq 0$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\lambda = \overline{\lambda}$, δηλαδή $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Έστω λ, μ ιδιοτιμές του A με $\lambda \neq \mu$ και X, Y ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ και μ αντίστοιχα, δηλαδή $AX = \lambda X$ και $AY = \mu Y$ με $X, Y \neq 0$. Παρατηρούμε ότι $\langle AX, Y\rangle = \langle \lambda X, Y\rangle = \lambda\langle X, Y\rangle$. Όμοια παρατηρούμε ότι

$$\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^*\rangle = \langle X, AY\rangle = \overline{\mu}\langle X, Y\rangle.$$

Όμως από το (i) έχουμε ότι $\overline{\mu} = \mu$, άρα συμπεραίνουμε ότι $(\lambda - \mu)\langle X, Y\rangle = 0$. Αφού $\lambda \neq \mu$ είναι σαφές ότι $\langle X, Y\rangle = 0$, δηλαδή τα X, Y είναι κάθετα μεταξύ τους.

□

Αφήνεται στον αναγνώστη να συγκρίνει την Ιδιότητα 7.3.1 (ii) με τη γνωστή ιδιότητα ενός τυχαίου πίνακα, ότι σε διακεκριμένες ιδιοτιμές αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

7.3.3 Μοναδιαίοι Πίνακες

Ορισμός 7.3.3. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται **μοναδιαίος** αν $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I_n$.

Παρατήρηση 7.3.2. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(i) Ο A είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A^*$.

(ii) Ο A είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν $A \cdot A^* = I_n \Leftrightarrow A^* \cdot A = I_n$.

(iii) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A^t$.

Παράδειγμα 7.3.3. (i) Ο ταυτοτικός πίνακας I_n είναι μοναδιαίος πίνακας.

(ii) Ο πίνακας $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ είναι μοναδιαίος, αφού $A_\varphi A_\varphi^t = I_2$. Επίσης παρατηρήστε ότι γεωμετρικά ο πίνακας A_φ παραστάνει τη στροφή του επιπέδου κατά γωνία φ μοιρών.

(iii) Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι μοναδιαίος, αφού ισχύει ότι $A = A^t$ και $A \cdot A^t = I_3$.

(iv) Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ δεν είναι μοναδιαίος, αφού $A \cdot A^t = 5I_2$. Παρατηρήστε όμως ότι ο πίνακας $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot A$ είναι μοναδιαίος.

Πρόταση 7.3.1. Έστω μοναδιαίοι πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.

(i) $|\det A| = 1$,

(ii) οι πίνακες AB και AB^{-1} είναι μοναδιαίοι.

(iii) ο πίνακας $\left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & A \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ είναι μοναδιαίος.

Απόδειξη. (i) Αφού ο A είναι μοναδιαίος έχουμε την εξής σχέση $A \cdot A^* = I_n$, επομένως ισχύει ότι

$$\det A \cdot \det A^* = \det A \cdot \det \overline{A} = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2 = 1 \Leftrightarrow |\det A| = 1.$$

(ii) Αφού οι πίνακες A, B είναι μοναδιαίοι, έχουμε ότι $(AB)(AB)^* = ABB^*A^* = AA^* = I_n$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $(AB)^*(AB) = I_n$. Συνεπώς ο πίνακας AB είναι μοναδιαίος. Επίσης παρατηρούμε ότι ισχύει $B^*B = I_n \Leftrightarrow B^{-1}(B^{-1})^* = I_n$, άρα ο πίνακας B^{-1} είναι μοναδιαίος και εφαρμόζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα έχουμε ότι AB^{-1} είναι μοναδιαίος.

(iii) Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα παρατηρώντας ότι $\left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & A \end{array}\right)^* = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & A^* \end{array}\right)$.

$\square$

Θεώρημα 7.3.1 (Χαρακτηρισμός μοναδιαίων πινάκων)**.** Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Ο A είναι μοναδιαίος.

(ii) $\langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle$, για κάθε $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.

(iii) Οι στήλες του A είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n\times 1}$.

(iv) Οι γραμμές του A είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n\times 1}$.

(v) $|AX| = |X|$, για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.

Απόδειξη.

- (i) → (ii) Ο A είναι μοναδιαίος, άρα ισχύει ότι $A^* \cdot A = I_n$. Έτσι έχουμε ότι

$$\langle AX, AY\rangle = \langle X, A^* \cdot AY\rangle = \langle X, Y\rangle.$$

- (ii) → (iii) Για $X = E_i$ και $Y = E_j$ έχουμε ότι $\langle AE_i, AE_j\rangle = \langle E_i, E_j\rangle$. Άρα προκύπτει ότι

$$\langle A^{(i)}, A^{(j)}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}.$$

  Άρα είναι σαφές ότι οι στήλες του A είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n\times 1}$.

- (iii) → (iv) Ισχύει ότι $\left\langle A^{(i)}, A^{(j)}\right\rangle = \delta_{ij}$, όπου $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$. Άρα από τον πολλαπλασιασμό πινάκων έχουμε ότι $A^t \cdot \overline{A} = I_n$ (βλέπε Παράγραφο 7.3.1.) Άρα προκύπτει ότι $A^* \cdot A = I_n$, άρα $\langle A_i, A_j\rangle = \delta_{ij}$, όπου A_i είναι η $i-$ γραμμή του A.

- (iv) → (i) Είναι άμεσο ότι αν $\langle A_i, A_j\rangle = \delta_{ij}$, τότε ισχύει ότι $A \cdot A^* = I_n$ μέσω των παραπάνω βημάτων.

- (ii) → (v) Το ζητούμενο είναι άμεσο εφαρμόζοντας της σχέση για $X = Y$.

- (v) → (ii) Έχουμε ότι $|AX| = |X|$ για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Αν $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ τυχαία, τότε ισχύει ότι $|A(X+Y)| = |X+Y|$. Έχουμε λοιπόν διαδοχικά τις εξής σχέσεις :

$$\begin{aligned} & |A(X+Y)| = |X+Y| \Leftrightarrow |A(X+Y)|^2 = |X+Y|^2 && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & \langle A(X+Y), A(X+Y)\rangle = \langle X+Y, X+Y\rangle && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & |AX|^2 + 2\langle AX, AY\rangle + |AY|^2 = |X|^2 + 2\langle X, Y\rangle + |Y|^2 && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & \langle AX, AY\rangle + \langle AY, AX\rangle = \langle X, Y\rangle + \langle Y, X\rangle \quad (\text{α}) \end{aligned}$$

  Τώρα στη θέση του Y αντικαθιστούμε το iY και προκύπτει η εξής σχέση :

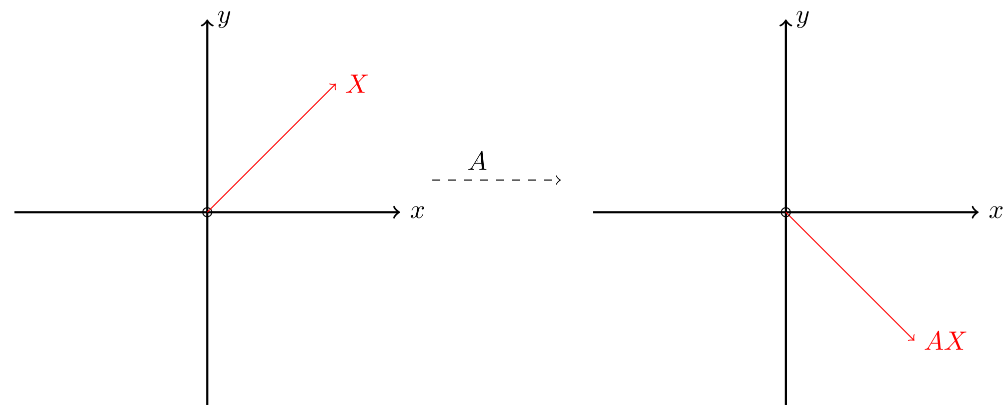
$$\begin{aligned} & \langle AX, iAY\rangle + \langle iAY, AX\rangle = \langle X, iY\rangle + \langle iY, X\rangle && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & -i\langle AX, AY\rangle + i\langle AY, AX\rangle = -i\langle X, Y\rangle + i\langle Y, X\rangle \quad (\text{β}) \end{aligned}$$

  Έτσι προσθέτοντας στην σχέση (α) την $i \cdot$ (β) το ζητούμενο έπεται άμεσα.

□

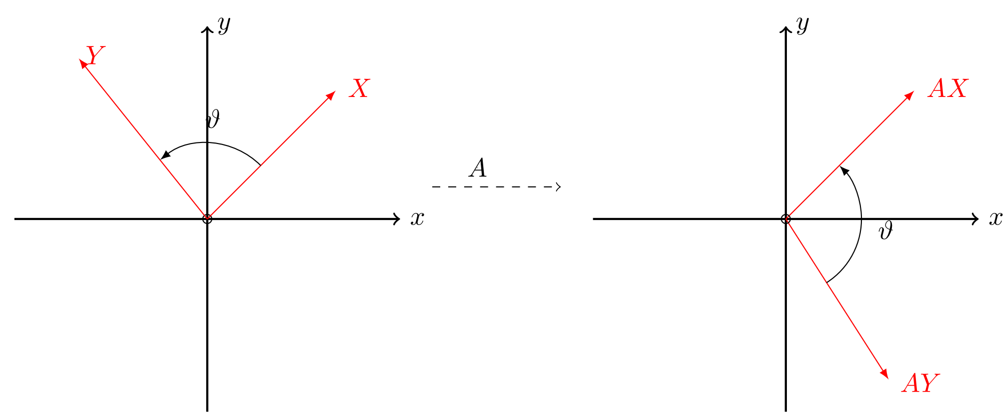
Αφού αποδείξαμε το θεώρημα ας κάνουμε κάποια σχόλια σχετικά με αυτό.

(i) Η ιδιότητα (v) του θεωρήματος εισάγει την διατήρηση του μήκους διανυσμάτων όταν πολλαπλασιάζονται με έναν μοναδιαίο πίνακα A.



Διατήρηση μήκους διανύσματος.

(ii) Για την ιδιότητα (ii) του θεωρήματος, γνωρίζουμε γενικά ότι για $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ορίζεται το $\cos\vartheta = \dfrac{\langle X, Y\rangle}{|X| \cdot |Y|}$, όπου θ η 'γωνία' που σχηματίζουν τα διανύσματα X, Y μεταξύ τους. Μέσω της παραπάνω ιδιότητας παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός δύο διανυσμάτων με ένα μοναδιαίο πίνακα διατηρεί τη μεταξύ τους γωνία.



Διατήρηση γωνίας διανυσμάτων.

Πόρισμα 7.3.1. Κάθε ιδιοτιμή μοναδιαίου πίνακα έχει μέτρο 1.

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μοναδιαίος πίνακας. Το ζητούμενο είναι άμεσο κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 7.3.1 (v) για ένα οποιοδήποτε ιδιοδιάνυσμα $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ του πίνακα A . □

7.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 7.

Ομάδα Α′ : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13
Ομάδα Β′ : 6, 9, 12, 14, 16, 17, 18, 19
Ομάδα Γ′ : 15

Άσκηση 7.1. Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$.

a. Αν $\langle u, v\rangle = 0$, τότε $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$.Όταν $n = 2$, η ισότητα εκφράζει το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

b. Αν $|u| = |v|$, τότε τα $u+v, u-v$ είναι κάθετα.Όταν $n = 2$, η ισότητα αυτή λέει ότι οι διαγώνιοι ρόμβου τέμνονται κάθετα.

c. $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$.Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης αυτής όταν $n = 2$.

Άσκηση 7.2. a. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει το διάνυσμα $u = 1/\sqrt{2}(1, 0, 1)$.

b. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει τα διανύσματα $u_1 = 1/\sqrt{5}(1, 0, 2)$ και $u_2 = (0, 1, 0)$.

Άσκηση 7.3. Έστω $\{u_1, \cdots, u_n\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^n$ και V ο υπόχωρος που παράγεται από τα $u_1, \cdots, u_k$, όπου $1 \leq k < n$.Δείξτε ότι μια ορθοκανονική βάση του $V^\perp$ είναι το σύνολο $\{u_{k+1}, \cdots, u_n\}$.

Άσκηση 7.4. Έστω V υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$v_1 = (1, 1, -1, -1), \quad v_2 = (1, 2, 3, -1), \quad \text{και} \quad v_3 = (4, 7, 8, -4).$$

Αφού βρείτε μια βάση του V, βρείτε μια ορθοκανονική βάση του V και μια ορθοκανονική βάση του $V^\perp$.

Άσκηση 7.5. Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\} \quad \text{και} \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Βρείτε μια ορθοκανονική βάση για καθένα από τους υπόχωρους $V, V^\perp, V \cap W, (V \cap W)^\perp$.

Άσκηση 7.6. Έστω $W_1, W_2 \leq \mathbb{F}^n$.Δείξτε ότι $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ και $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

Άσκηση 7.7. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.Δείξτε τις ακόλουθες σχέσεις.

a. $(\overline{A})^t = \overline{A^t}$.

b. $\det A^* = \det \overline{A} = \overline{\det A}$.

c. $(A^*)^* = A$.

d. $(\lambda A^*) = \overline{\lambda} A^*$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.

e. $(A+B)^* = A^* + B^*$.

f. $(AB)^* = B^* A^*$.

g. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Άσκηση 7.8. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.Αν $\phi(x) \in \mathbb{C}[x], \phi(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, με $\overline{\phi}(x)$ συμβολίζουμε το πολυώνυμο $\overline{\phi}(x) = \overline{a_n} x^n + \cdots + \overline{a_1} x + a_0$.Δείξτε τις ακόλουθες προτάσεις.

a. $\chi_{A^*}(x) = \overline{\chi_A}(x)$.

b. $m_{A^*}(x) = \overline{m_A}(x)$.

c. Το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν το $\overline{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^*.

Άσκηση 7.9. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $A^*A = -A$.Δείξτε ότι ο A είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα της μορφής
$\mathrm{diag}(0, \cdots, 0, -1, \cdots, -1)$ και ότι $\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}(A + I_n) = n$.

Άσκηση 7.10. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μοναδιαίοι πίνακες.Δείξτε τις ακόλουθες προτάσεις.

a. Οι $\overline{A}, A^t, A^{-1}$ είναι μοναδιαίοι.

b. Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A, τότε $|\lambda| = 1$ και το $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^*.

c. $|\det A| = 1$

d. Οι AB και AB^{-1} είναι μοναδιαίοι.

Άσκηση 7.11. Να βρεθεί μοναδιαίος πίνακας με πρώτη γραμμή τη $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$.

Άσκηση 7.12. Έστω $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μοναδιαίος πίνακας τέτοιος ώστε $\det(U - I_n) \neq 0$.Τότε ο $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ που από $iH = (U + I_n)(U - I_n)^{-1}$ είναι Ερμιτιανός.

Άσκηση 7.13. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.Δείξτε ότι αν ισχύουν οποιεσδήποτε από τις επόμενες προτάσεις, τότε ισχύει και η τρίτη.

a. Ο A είναι Ερμιτιανός.

b. Ο A είναι μοναδιαίος.

c. $A^2 = I_n$.

Άσκηση 7.14. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας μοναδιαίος πίνακας.Δείξτε τα εξής.

a. Αν $\det A = 1$ και n περιττός, τότε το 1 είναι ιδιοτιμή του A.

b. Αν $\det A = -1$ και n άρτιος, τότε το 1 είναι ιδιοτιμή του A.

c. Αν $\det A = -1$, τότε το -1 είναι ιδιοτιμή του A.

Άσκηση 7.15. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μοναδιαίοι πίνακες τέτοιο ώστε $\det A = -\det B$. Τότε

$$\det(A + B) = 0.$$

Άσκηση 7.16. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A^* = -A$.Δείξτε τα εξής.

a. Κάθε ιδιοτιμή του A είναι της μορφής $i\mu,\ \mu \in \mathbb{R}$.

b. Ο πίνακας $A + I_n$ είναι αντιστρέψιμος και $\det(A + I_n) > 1$.

c. Ο πίνακας $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ είναι μοναδιαίος.

Άσκηση 7.17. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.Δείξτε ότι αν $|AX| = |X|$ για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, τότε ο A είναι μοναδιαίος.

Άσκηση 7.18. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $\langle AX, X\rangle = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.Δείξτε ότι $A = 0$.Αληθεύει το προηγούμενο συμπέρασμα αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\langle AX, X\rangle = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$;

Άσκηση 7.19. Αποδείξτε την άσκηση 7.17 χρησιμοποιώντας την άσκηση 7.18.

Άσκηση 7.20 (Επαναληπτική άσκηση κατανόησης)**.** Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα.

a. Αν οι $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι Ερμιτιανοί, τότε ο $A + B$ είναι Ερμιτιανός.

b. Αν οι $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι Ερμιτιανοί, τότε ο AB είναι Ερμιτιανός.

c. Αν οι $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι Ερμιτιανοί και $AB = BA$, τότε ο AB είναι Ερμιτιανός.

d. Ο πίνακας $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ είναι μοναδιαίος.

e. Αν $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι μοναδιαίοι, τότε κάθε ιδιοτιμή του AB έχει μέτρο 1.

f. Δεν υπάρχει μοναδιαίος $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $(A - 2I_n)(A - 3I_n)(A - 4I_n) = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΕΡΜΙΤΙΑΝΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

8.1 Λήμμα του Schur

Λήμμα 8.1.1 (Schur)**.** (i) (Μιγαδική Εκδοχή) Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ υπάρχει $U_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μοναδιαίος με $U_A^{-1}AU_A$ να είναι άνω τριγωνικός.

(ii) (Πραγματική Εκδοχή) Για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τριγωνίσιμο υπάρχει $U_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μοναδιαίος με $U_A^{-1}AU_A$ να είναι άνω τριγωνικός.

Απόδειξη. (i) Η αποδειξη που ακολουθεί είναι όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1 με τη διαφοροποίηση ότι αναζητούμε μονάδιαιο πίνακα U_A.

Θα κάνουμε χρήση επαγωγής στη διάσταση του πίνακα A.

- **Βάση.** Για $n = 1$ είναι σαφές ότι το ζητούμενο ισχύει.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Υποθέτουμε τώρα ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε πίνακα διάστασης $(n-1)\times(n-1)$. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, οπου γνωρίζουμε ότι είναι τριγωνίσιμος, δηλαδή το $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.
  Έστω u ένα ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ. Για $v_1 = \frac{u}{|u|}$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\{v_1, \cdots, v_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Τότε υπάρχει $U_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $U_1^{(i)} = v_i$ για κάθε $i = 1, \cdots, n$ και μάλιστα από το Θεώρημα 7.3.1 ο U_1 είναι μοναδιαίος, ώστε $U_1^{-1}AU_1 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & O \\ \hline O & B \end{array}\right)$ με $B \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$.
  Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $U_2 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ μοναδιαίος ώστε ο $U_2^{-1}BU_2$ να είναι άνω τριγωνικός. Θεωρούμε τον πίνακα $U_A = U_1 \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & U_2 \end{array}\right)$ ο οποίος από Πρόταση 7.3.1 είναι μοναδιαίος και μάλιστα $U_A^{-1}AU_A$ είναι άνω τριγωνικός.

(ii) Η απόδειξη είναι ακριβώς όμοια με το (i).

□

8.2 Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα 8.2.1 (Φασματικό)**.** (i) (Μιγαδική Εκδοχή) Για κάθε Ερμιτιανό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μοναδιαίος με $U^{-1}AU$ να είναι διαγώνιος.

(ii) (Πραγματική Εκδοχή) Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικό υπάρχει $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μοναδιαίος με $U^{-1}AU$ να είναι διαγώνιος.

Απόδειξη. (i) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ένας Ερμιτιανός πίνακας.Από το Λήμμα του Schur υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μοναδιαίος με $U^{-1}AU = T$, όπου T είναι άνω τριγωνικός. Αφού ισχύει ότι $A = A^*$ έχουμε ότι

$$UTU^{-1} = (UTU^{-1})^* = (U^{-1})^*T^*U^* = UT^*U^{-1} \Leftrightarrow T = T^*.$$

Επειδή ο T είναι άνω τριγωνικός, ισχύει ότι ο T^* είναι κάτω τριγωνικός, συνεπώς ο T είναι διαγώνιος και μάλιστα είναι και πραγματικός αφού $T = \overline{T}$.

(ii) Η απόδειξη είναι όμοια με το (i) παρατηρώντας ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι τριγωνίσιμος στο $\mathbb{R}$, αφού είναι τριγωνίσιμος στο $\mathbb{C}$ και από τις Ιδιότητες 7.3.1 κάθε ιδιοτιμή του είναι πραγματικός αριθμός. □

Παράδειγμα 8.2.1. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Να βρεθεί μοναδιαίος P με $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

Απόδειξη. Κατά τα γνωστά βρίσκουμε $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ μια βάση του $V_A(4)$ και $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ μια βάση του $V_A(1)$. Από τις Ιδιότητες 7.3.1 έχουμε ότι κάθε στοιχείο του $V_A(4)$ είναι κάθετο με κάθε στοιχείο του $V_A(1)$ αφού ο A είναι ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας. Εφαρμόζουμε ξεχωριστά σε κάθε ιδιόχωρο Gram-Schmidt, όπου προκύπτει ότι $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ μια ορθοκανονική βάση του $V_A(4)$ και $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ μια ορθοκανονική βάση του $V_A(1)$. Έτσι μέσω των παραπάνω αποτελεσμάτων θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} 1\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

γνωρίζουμε ότι ο P είναι μοναδιαίος και μάλιστα $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(4, 1, 1)$. □

8.3 Κανονικοί Πίνακες

Ερώτημα 8.3.1. Για ποίους πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ώστε ο $U^{-1}AU$ να είναι διαγώνιος ; Είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα ότι οι Ερμιτιανοί έχουν αυτή την ιδιότητα. Υπάρχουν όμως άλλοι ;

Παρατήρηση 8.3.1. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με την παραπάνω ιδιότητα, δηλαδή υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ώστε $U^{-1}AU = \Delta$ διαγώνιος. Τότε έχουμε ότι $A = U\Delta U^{-1}$. Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$$AA^* = U\Delta U^{-1} \cdot (U\Delta U^{-1})^* = U\Delta U^{-1}(U^{-1})^*\Delta^* U^* = U\Delta U^{-1}U\Delta^* U^{-1} = U\Delta\Delta^* U^{-1}.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $A^*A = U\Delta^*\Delta U^{-1}$. Όμως ο Δ είναι διαγώνιος, άρα έχουμε ότι $\Delta\Delta^* = \Delta^*\Delta$. Έτσι συμπεραίνουμε πως $AA^* = A^*A$. Στη συνέχεια θα δούμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Λήμμα 8.3.1. Αν $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ άνω τριγωνικός και $TT^* = T^*T$, τότε ο T είναι διαγώνιος.

Απόδειξη. Το ζητούμενο θα αποδειχθεί με χρήση επαγωγής στη διάσταση του πίνακα T.

- **Βάση.** Για $n = 1$ το ζητούμενο ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Έστω $T = \left(\begin{array}{c|ccc} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $T_1 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ άνω τριγωνικός. Έχουμε ότι $TT^* = T^*T$, ισοδύναμα :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} \overline{t_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \overline{t_{12}} & & & \\ \vdots & & T_1^* & \\ \overline{t_{1n}} & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \overline{t_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \overline{t_{12}} & & & \\ \vdots & & T_1^* & \\ \overline{t_{1n}} & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

  Άρα έχουμε ότι $|t_{11}|^2 + \cdots + |t_{1n}|^2 = |t_{11}|^2$, δηλαδή $t_{12} = \cdots = t_{1n} = 0$.Έτσι προκύπτει ότι $T_1T_1^* = T_1^*T_1$, δηλαδή από επαγωγική υπόθεση ο T_1 είναι διαγώνιος. Αφού ο T_1 είναι διαγώνιος, τότε είναι σαφές ότι ο πίνακας T είναι διαγώνιος.

□

Θεώρημα 8.3.1. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μοναδιαίος πίνακας ώστε ο $U^{-1}AU$ να είναι διαγώνιος.

(ii) $AA^* = A^*A$.

Απόδειξη.

- (i) → (ii) Το ζητούμενο έχει αποδειχθεί στην Παρατήρηση 8.3.1
- (ii) → (i) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $AA^* = A^*A$. Από το Λήμμα του Schur υπάρχει μοναδιαίος U, όπου $A = UTU^{-1}$ με T να είναι άνω τριγωνικός. Από την σχέση $AA^* = A^*A$ έχουμε ότι $TT^* = T^*T$ με T να είναι άνω τριγωνικός, άρα από το Λήμμα 8.3.1 έχουμε ότι T είναι διαγώνιος.

□

Ορισμός 8.3.1. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται **κανονικός** αν $AA^* = A^*A$.

Παράδειγμα 8.3.1. (i) Κάθε διαγώνιος πίνακας είναι κανονικός.

(ii) Κάθε Ερμιτιανός πίνακας είναι κανονικός.

(iii) Κάθε μοναδιαίος πίνακας είναι κανονικός.

(iv) Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ δεν είναι κανονικός, αφού $AA^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = A^*A$.

Θεώρημα 8.3.2. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Ο A είναι κανονικός.

(ii) Υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μοναδιαίος με $U^{-1}AU = \Delta$ να είναι διαγώνιος.

(iii) Υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A.

Απόδειξη.

- (i) ↔ (ii) Το ζητούμενο έχει αποδειχθεί στο Θεώρημα 8.3.1
- (ii) → (iii) Γνωρίζουμε ότι κάθε στήλη του U είναι ιδιοδιάνυσμα του A. Αυτές είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n\times 1}$, αφού ο πίνακας U είναι μοναδιαίος.
- (iii) → (ii) Η απόδειξη του ζητούμενου αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

□

Λήμμα 8.3.2. Έστω πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $\langle BX, X\rangle = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Τότε $B = 0$.

Απόδειξη. Αν $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, τότε υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$$\langle B(X+Y), X+Y\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle BX, X\rangle + \langle BX, Y\rangle + \langle BY, X\rangle + \langle BY, Y\rangle = 0$$

$$\langle BX, Y\rangle + \langle BY, X\rangle = 0 \tag{8.1}$$

Βάζοντας το iY στη θέση του Y προκύπτει η σχέση

$$i\langle BX, Y\rangle + i\langle BY, X\rangle = 0 \tag{8.2}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (8.1) και (8.2) έχουμε ότι $\langle BX, Y\rangle = 0$, για κάθε $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Από το Λήμμα 8.3.1 έχουμε ότι $B = 0$. □

Προσοχή ! Το Λήμμα 8.3.2 δεν αληθεύει γενικά αν $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $\langle BX, X\rangle = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Για παράδειγμα ο πίνακας στροφής κατά 90°, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες, αλλά $B \neq 0$.

Λήμμα 8.3.3. Έστω $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ άνω τριγωνικός τέτοιος ώστε κάθε ιδιοδιάνυσμα του T να είναι ιδιοδιάνυσμα του T^*. Τότε ο T είναι διαγώνιος.

Απόδειξη. Το ζητούμενο θα αποδειχθεί με επαγωγικό στο βαθμό του πίνακα T.

- Για $n = 1$ το ζητούμενο ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Έστω T άνω τριγωνικός, όπου κάθε ιδιοδιάνυσμά του είναι και ιδιοδιάνυσμα του T^*. Ο πίνακας T έχει την εξής μορφή $T = \left(\begin{array}{c|ccc} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$, όπου $T_1 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ άνω τριγωνικός και $T^* = \left(\begin{array}{c|ccc} \overline{t_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \overline{t_{12}} & & & \\ \vdots & & T_1^* & \\ \overline{t_{1n}} & & & \end{array}\right)$. Αφού το E_1 είναι ιδιοδιάνυσμα του T, από υπόθεση το E_1 είναι και ιδιοδιάνυσμα του T^*. Άρα, $(T^*)^{(1)} = \lambda E_1$, συνεπώς συμπεραίνουμε ότι $\overline{t_{12}} = \cdots = \overline{t_{1n}} = 0$. Τέλος έχουμε ότι αν $X' = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του T_1, τότε $X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T, άρα και ιδιοδιάνυσμα του T^*. Έτσι συμπεραίνουμε ότι X' είναι ιδιοδιάνυσμα του $(T_1)^*$ και από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι ο T_1 είναι διαγώνιος.

□

Θεώρημα 8.3.3. Έστω πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Ο πίνακας A είναι κανονικός.

(ii) Υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μοναδιαίος, ώστε ο πίνακας $U^{-1}AU$ να είναι διαγώνιος.

(iii) Υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A.

(iv) $|AX| = |A^*X|$, για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.

(v) $V_A(\lambda) = V_{A^*}(\overline{\lambda})$, για κάθε λ ιδιοτιμή του A.

(vi) Κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι ιδιοδιάνυσμα του A^*.

(vii) $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$

Απόδειξη. • Οι ισοδυναμίες (i),(ii),(iii) έχουμε αποδειχθεί στο Θεώρημα 8.3.2

- (i) $\to$ (iv) Από την υπόθεση ο A είναι κανονικός, άρα ισχύει ότι $AA^* = A^*A$. Για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$$\langle (A^*A - AA^*)X, X\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle A^*AX, X\rangle = \langle AA^*X, X\rangle \Leftrightarrow \langle AX, AX\rangle = \langle A^*X, A^*X\rangle$$
$$\Leftrightarrow |AX|^2 = |A^*X|^2 \Leftrightarrow |AX| = |A^*X|$$

δηλαδή το ζητούμενο.

- (iv) $\to$ (i) Έστω ότι ισχύει $|AX| = |A^*X|$, για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής

$$|AX| = |A^*X| \Leftrightarrow \langle AX, AX\rangle = \langle A^*X, A^*X\rangle$$
$$\Leftrightarrow \langle A^*AX, X\rangle = \langle AA^*X, X\rangle \Leftrightarrow \langle (A^*A - AA^*)X, X\rangle = 0$$

Αφού η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ από το Λήμμα 8.3.2 έχουμε ότι $AA^* = A^*A$, δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός.

- (i) $\to$ (v) Επειδή ο A είναι κανονικός, τότε και ο πίνακας $B = A - \lambda I_n$ είναι κανονικός. Τώρα από την ιδιότητα (iv), που αποδείξαμε, ισχύει ότι για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $|BX| = 0 \Leftrightarrow |B^*X| = 0$. Έτσι ισχύουν οι εξής σχέσεις :

$$|BX| = 0 \Leftrightarrow |B^*X| = 0 \Leftrightarrow BX = 0 \Leftrightarrow B^*X = 0$$
$$\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0 \Leftrightarrow (A^* - \overline{\lambda} I_n)X = 0$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι $X \in V_A(\lambda) \Leftrightarrow X \in V_{A^*}(\overline{\lambda})$, άρα προκύπτει ότι $V_A(\lambda) = V_{A^*}(\overline{\lambda})$.

- (v) $\to$ (i) Από το Λήμμα του Schur υπάρχει $U^{n\times n}$ μοναδιαίος, ώστε $U^{-1}AU = T$ να είναι άνω τριγωνικός, δηλαδή έχουμε ότι $U^{-1}A^*U = T^*$. Παρατηρούμε ότι αν X ιδιοδιάνυσμα του T, τότε το UX είναι ιδιοδιάνυσμα του A. Από την υπόθεση έχουμε ότι UX είναι ιδιοδιάνυσμα του A^*, άρα τελικά το X είναι ιδιοδιάνυσμα και του T^*. Από το Λήμμα 8.3.3 ο T είναι διαγώνιος, άρα ο $A = UTU^{-1}$ είναι κανονικός.

- (i) $\to$ (vi) Το ζητούμενο έπεται άμεσα, αφού ισχύουν οι συνεπαγωγές (i) $\to$ (v) και (v) $\to$ (vi) κατα τετριμμένο τρόπο.

- (vi) $\to$ (i) Το ζητούμενο έπεται άμεσα, αφού ισχύουν οι συνεπαγωγές (v) $\to$ (i) και (vi) $\to$ (v) κατα τετριμμένο τρόπο.

- (i) $\to$ (vii) Άμεσα επαληθεύεται ότι $\mathrm{Tr}(AA^*) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$. Αφού ο A είναι κανονικός, υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μοναδιαίος, ώστε $U^{-1}AU = \Delta$ διαγώνιος, συνεπώς ισχύει $U^{-1}A^*AU = \Delta^*$. Άρα προκύπτει ότι $U^{-1}AA^*U = \Delta\Delta^* = \mathrm{diag}\left(\lambda_1\overline{\lambda_1}, \cdots, \lambda_n\overline{\lambda_n}\right)$. Συνεπώς ισχύει ότι $\mathrm{Tr}(AA^*) = \sum_i |\lambda_i|^2$, δηλαδή το ζητούμενο.

- (vii) $\to$ (i) Υποθέτουμε ότι $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$. Από το Λήμμα του Schur υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μοναδιαίος, ώστε $U^{-1}AU = T$, άνω τριγωνικός. Έχουμε ότι $U^{-1}A^*U = T^*$, άρα προκύπτει ότι $U^{-1}AA^*U = TT^*$. Επομένως προκύπτει ότι $\mathrm{Tr}(AA^*) = \mathrm{Tr}(TT^*)$, δηλαδή $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_{i,j} |t_{ij}|^2$, όπου $T = (t_{ij})$.

  Όμως επειδή ο T είναι τριγωνικός έχουμε ότι $t_{ii} = \lambda_i$, για κάθε $i = 1, \cdots, n$. Έτσι έχουμε ότι
  $$\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2 + \sum_{i\neq j} |t_{ij}|^2 \Leftrightarrow \sum_{i\neq j} |t_{ij}|^2 = 0 \Leftrightarrow t_{ij} = 0\ ,$$
  για κάθε $i \neq j$. Τελικά λοιπόν προκύπτει ότι ο T είναι διαγώνιος, δηλαδή ο A είναι κανονικός.

$\square$

Μετά την ολοκλήρωση της απόδειξης ας κάνουμε μερικά σχόλια σε σχέση με το Θεώρημα 8.3.3

(i) Η ιδιότητα (iv) μας λέει ότι αν A κανονικός ισχύει ότι $|AX| = |A^*X|$. Για $X = E_i$ έχουμε ότι $|A^{(i)}| = |A_i|$, δηλαδή η i-στήλη του A έχει το ίδιο μήκος με την i-γραμμή του A για κάθε $i = 1, \cdots, n$.

(ii) Γενικά για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ισχύει ότι αν $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$, τότε $\chi_{A^*}(x) = (x-\overline{\lambda_1})\cdots(x-\overline{\lambda_n})$. Στην περίπτωση όμως που ο A είναι κανονικός ισχύει και ότι $V_A(\lambda) = V_{A^*}(\lambda)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A.

8.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 8.

Ομάδα Α′ : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15, 17, 19, 20, 21, 21, 23, 26
Ομάδα Β′ : 8, 9, 10, 13, 14, 16, 18, 24, 25, 27
Ομάδα Γ′ : 11, 12

Άσκηση 8.1. Εξετάστε αν υπάρχει πραγματικός μοναδιαίος πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι άνω τριγωνικός, όπου $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.Αν υπάρχει να βρεθεί ένας τέτοιος P.

Άσκηση 8.2. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.Να βρεθεί μοναδιαίος $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $P^{-1}AP$ διαγώνιο.

Άσκηση 8.3. Έστω $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με ιδιοτιμές $1, 3, 13$.

a. Να βρεθεί μοναδιαίος $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $U^{-1}AU$ διαγώνιο.

b. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μια γραμμική απεικόνιση με $(f : \hat{a}, \hat{a}) = A$, όπου $\hat{a}$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$.Δείξτε ότι $f^{40} - 5f^9 + 3f^6 + 1_{\mathbb{R}^3} \neq 0$.

Άσκηση 8.4. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n},\ H = \frac{1}{2}(A + A^*)$ και $S = \frac{1}{2}(A - A^*)$.

a. Δείξτε ότι ο πίνακας H είναι Ερμιτιανός και $S^* = -S$.

b. Δείξτε ότι αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του H είναι ιδιοδιάνυσμα του S, τότε ο πίνακας A είναι κανονικός.

Άσκηση 8.5. Δείξτε ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{2\times 1}$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του $\begin{pmatrix} 1 & i \\ a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ αν και μόνο αν $|a| = 1$.

Άσκηση 8.6. Δείξτε ότι αν ο A είναι κανονικός, τότε η i γραμμή του A έχει το ίδιο μήκος με την i στήλη του A για κάθε i.

Άσκηση 8.7. Να βρεθούν όλοι οι κανονικοί πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A^m = 0$ για κάποιο m.

Άσκηση 8.8. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ κανονικός πίνακας.Δείξτε τα εξής.

a. A Ερμιτιανός $\Leftrightarrow$ κάθε ιδιοτιμή του A είναι πραγματικός αριθμός.

b. A μοναδιαίος $\Leftrightarrow$ κάθε ιδιοτιμή του A έχει μέτρο 1.

Άσκηση 8.9. a. Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι συμμετρικός τέτοιος ώστε $A^k = I_n$, τότε $A^2 = I_n$.

b. Να βρεθούν όλοι οι συμμετρικοί $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $A^{1821} = I_n$.

c. Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι Ερμιτιανός και μοναδιαίος τέτοιος ώστε $Tr(A) = 0$, τότε ο n είναι άρτιος.

d. Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι Ερμιτιανός και μοναδιαίος και έχει τουλάχιστον δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

Άσκηση 8.10. a. Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ο $A + A^* - iI_n$ είναι αντιστρέψιμος.

b. Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι συμμετρικοί και ισχύει $AB = BA$, τότε ο $AB + iI_n$ είναι αντιστρέψιμος.

c. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(i) Κάθε ιδιοτιμή του AA^* είναι πραγματικός αριθμός και μη αρνητικός.

(ii) $\det(AA^* + I_n)$ είναι πραγματικός αριθμός και θετικός.

Άσκηση 8.11. Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός, τότε $A^* = f(A)$ για κάποιο $f(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Άσκηση 8.12. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $B = AA^* - A^*A$.Δείξτε ότι αν $AB = BA$, τότε ο A είναι κανονικός.

Άσκηση 8.13. Να βρεθεί συμμετρικός $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με ιδιοτιμές $1, 1, -1$ τέτοιος ώστε ο ιδιόχωρος $V_A(1)$ να παράγεται από τα $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.Είναι ο A μοναδικός ;

Άσκηση 8.14. a. Έστω $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ τέτοιος ώστε $\dim V_A(2) = \dim V_A(3) = 2$ και $\langle u, v\rangle = 0$ για κάθε $u \in V_A(2), v \in V_A(3)$.Δείξτε ότι ο A είναι συμμετρικός.

b. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $AA^t = A^tA$ και $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων στο $\mathbb{R}[x]$.Δείξτε ότι ο A είναι συμμετρικός.

Άσκηση 8.15. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας που δεν είναι της μορφής $cI_n, c \in \mathbb{R}$.Να βρεθεί το $m_A(x)$ αν $(A - 2I_n)^3(A - 3I_n)^4 = 0$.

Άσκηση 8.16. Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ κανονικός λ_1, λ_2 οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A, τότε $V_A(\lambda_1) = V_A(\lambda_2)^{\perp}$.

Άσκηση 8.17. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ κανονικοί πίνακες με $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$ και $\chi_B(x) = (x-3)^2(x-4)^2$.Αν $V_A(1) = V_B(3)$, δείξτε ότι $AB = BA$.

Άσκηση 8.18. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.Δείξτε ότι ο A είναι Ερμιτιανός αν και μόνο αν $\langle AX, X\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.

Άσκηση 8.19. Δώστε παράδειγμα $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ έτσι ώστε υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^{3\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A αλλά δεν υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{3\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A.

Άσκηση 8.20. Έστω $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $(B - 1/2I_n)^3(B - iI_n)^4 = 0$.

a. Δείξτε ότι αν ο B είναι Ερμιτιανός, τότε $B = 1/2I_n$.

b. Δείξτε ότι αν ο B είναι μοναδιαίος, τότε $B = iI_n$.

Άσκηση 8.21. Έστω $u \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ με $|u| = 1$.Θέτουμε $S = I_n - uu^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a. Δείξτε ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ αποτελούμενη απο ιδιοδιανύσματα του S.

b. Δείξτε ότι $Su = 0$ και $Sv = v$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ τέτοιο ώστε $\langle v, u\rangle = 0$.Στη συνέχεια βρείτε τη διάσταση κάθε ιδιόχωρου του S.

c. Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία του S όταν $n = 2, 3$.

Άσκηση 8.22. Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

a. Αληθεύει ότι για κάθε a υπάρχει μοναδιαίος $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ με $U^{-1}AU$ άνω τριγωνικό ;

b. Αληθεύει ότι για $a = 1$ υπάρχει μοναδιαίος $Q \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ με $Q^{-1}AQ$ άνω τριγωνικό ;

c. Να βρεθούν όλες οι τιμές του a τέτοιες ώστε υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{3\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A.

d. Έστω $a = 0$.Να βρεθεί μοναδιαίος $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ με $U^{-1}AU = diag(1, -1, 1)$.

Άσκηση 8.23. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a. Βρείτε μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A και εξετάστε αν ο A είναι διαγώνιος.

b. Βρείτε δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του $B = A^{12} - 8A^7 + 5A^5 + 4I_3$.

c. Να εξεταστεί αν υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a} = (a_1, a_2, a_3)$ του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $(f : \hat{a}, \hat{a}) = A$ όπου $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τις σχέσεις $f(a_1) = 3a_1 - 6a_2,\ f(a_2) = 3a_1 - 8a_2 + 6a_3,\ f(a_3) = 5a_3$.

d. Να βρεθεί (εφόσον υπάρχει) αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ με $P^{-1}AP$ άνω τριγωνικό.

e. Να βρεθεί (εφόσον υπάρχει) μοναδιαίος $U \in \mathbb{R}^{3\times3}$ με $U^{-1}AU$ άνω τριγωνικό.

Άσκηση 8.24. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$.

a. Να βρεθεί αν υπάρχει, μοναδιαίος $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ με $P^{-1}AP$ άνω τριγωνικό.

b. Έστω $B = A^{1821} - A^3 + I_3$.Να βρεθεί αντιστρέψιμος $Q \in \mathbb{R}^{3\times3}$ με $Q^{-1}AQ$'άνω τριγωνικό.

c. Αν $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση με $(f : \hat{a}, \hat{a})$, να εξεταστεί αν η $f^3 - 3f - 18 \cdot 1_{\mathbb{R}_3}$ είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 8.25. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας.Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$L_A : \mathbb{R}^{n\times1} \to \mathbb{R}^{n\times1},\ L_A(X) = AX\ .$$

Δείξτε ότι $\ker L_A = (\mathrm{Im}(L_A))^{\perp}$.

Άσκηση 8.26. Έστω $A \in \mathbb{C}^{3\times3}$ τέτοιος ώστε $A^*A = 4A$.

a. Δείξτε ότι ο A είναι Ερμιτιανός.

b. Εξετάστε αν υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{3\times1}$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A.

c. Δείξτε ότι $\mathrm{rank}(A) = 1$, τότε υπάρχει μοναδιαίος $U \in \mathbb{C}^{3\times3}$ ώστε $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(4, 0, 0)$.

d. Εξετάστε αν ισχύει $\langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle$ για κάθε $X, Y \in \mathbb{C}^{3\times1}$.

Άσκηση 8.27. Αν $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι άνω τριγωνικός τέτοιος ώστε κάθε ιδιοδιάνυσμα του είναι ιδιοδιάνυσμα του T^t, τότε ο T είναι διαγώνιος.

Άσκηση 8.28 (Επαναληπτική άσκηση κατανόησης)**.** Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα.Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Ερμιτιανός.

a. Αν ο A είναι μοναδιαίος και κάθε ιδιοτιμή του είναι θετική, τότε $A = I_n$.

b. Ο $\varphi(A)$ είναι διαγωνίσιμος για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{C}[x]$.

c. Αν $A^m = 0$ για κάποιο m, τότε $A = 0$.

d. Αν κάθε ιδιοτιμή του A είναι μη αρνητική, τότε υπάρχει Ερμιτιανός $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $B^2 = A$.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Βιβλιογραφία

Αναφορά 8.1. Μια Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα, Βάρσος Δ. , Δεριζιώτης Δ. , Εμμανουήλ Γ. , Μαλιάκας Μ. , Μελάς Α. , Ταλέλλη Ο.

Αναφορά 8.2. Ασκήσεις στη Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, Μαλιάκας Μ.

Αναφορά 8.3. Linear Algebra, Jörg Liesen Volker Mehrmann

Πηγές από το Διαδίκτυο

Αναφορά 8.4. **Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ (2018-19 Εαρινό εξάμηνο)** Μ. Μαλιάκας

Αναφορά 8.5. Wikipedia